

# Od stromov k Eulerovým rovniciam

Ako makroekonómia vysvetľuje výnosy finančných aktív

Ivan Sutoris (CERGE-EI, ČNB)

KM FPV UMB, 8. 11. 2016

# Úvod

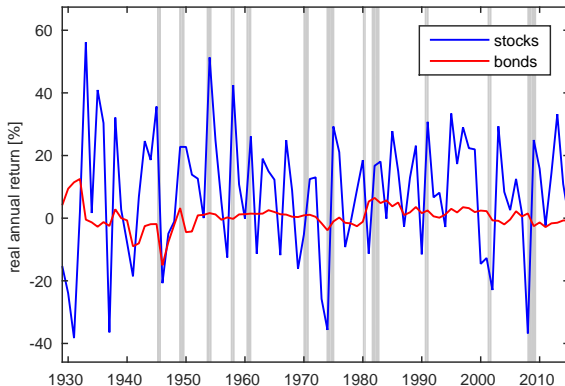
- ▶ význam finančných trhov z individuálneho pohľadu:
  - ▶ presun zdrojov v čase
  - ▶ distribúcia rizika
- ▶ význam finančných trhov v makroekonómii
  - ▶ prostredník medzi úsporami a investíciami
- ▶ aký je vzťah medzi finančnými výnosmi a makroekonomickými fundamentami?

# Základné pojmy

- ▶ čas: diskretný ( $t = 1, 2, \dots$ )
  - ▶ modely v spojitom čase sú populárnejšie vo financiách
- ▶ základné finančné nástroje:
  - ▶ akcia:
    - ▶ cena  $p_t$
    - ▶ nárok na výplatu (náhodných) dividend  $d_{t+1}, d_{t+2}, \dots$
  - ▶ dlhopis:
    - ▶ cena  $p_t^b$
    - ▶ nárok na výplatu 1 v čase  $t + 1$  (bez rizika)
- ▶ výnosy:
  - ▶  $R_{t+1}^s = \frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t}$
  - ▶  $R_{t+1}^b = \frac{1}{p_t^b}$  (úroková miera)
- ▶ abstrahujeme od inflácie

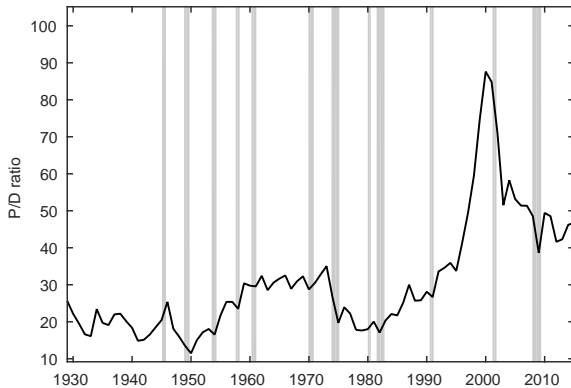
- ▶ výnosy akcií sú volatilnejšie a v priemere vyššie oproti dlhopisom<sup>1</sup>:

$E[R^s]$	$\sigma[R^s]$	$E[R^b]$	$\sigma[R^b]$
7.93%	19.91%	0.42%	3.80%



<sup>1</sup>zdroj: Ken French, FRED

- ▶ ceny akciú sú kontracyklické<sup>2</sup>:



---

<sup>2</sup>zdroj: Robert Shiller

# Financie a makroekonómia

- ▶ moderná makroekonómia preferuje teórie zohľadňujúce optimálne správanie spotrebiteľov a firiem
  - ▶ “microfoundations”
- ▶ “consumption-based asset pricing” - ceny finančných aktív musia byť konzistentné
  - ▶ s optimálnym rozhodovaním domácností o miere úspor...
  - ▶ ... a alokácii portfólia
- ▶ modelovanie problému spotrebiteľa pomocou teórie optimálneho riadenia a dynamického programovania

# Problém spotřebitele

- ▶  $N$  finančních aktiv
  - ▶ dividendy  $\mathbf{d}_t \in \mathbb{R}^N$ , ceny akci  $\mathbf{p}_t \in \mathbb{R}^N$
  - ▶ z pohledu spotřebitele: exogénny stochastický proces
- ▶ příjem spotřebitele závisí od portfolia  $\mathbf{a}_t \in \mathbb{R}^N$ :

$$W_t = (\mathbf{p}_t + \mathbf{d}_t) \cdot \mathbf{a}_t$$

- ▶ příjem jde na spotřebu  $c_t \in \mathbb{R}$  a nákup nového portfolia  $\mathbf{a}_{t+1}$ :

$$c_t + \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{a}_{t+1} = W_t$$

- ▶ účelová funkcia:

$$V_t = \max \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

# Problém spotrebiteľa

- ▶ uvažujme stacionárnu ekonomiku:
  - ▶ ceny, dividendy sú funkciou stavu  $z_t$
  - ▶  $z_t$  je stacionárny, ergodický proces
  - ▶ rozhodnutia budú závisieť od  $W, z$
  - ▶ účelová funkcia tiež závisí od  $W, z$
- ▶ Bellmanova rovnica:

$$V(W, z) = \max_{c, \mathbf{a}'} \left\{ u(c) + \beta \mathbb{E}_{z'|z} [V((\mathbf{p}(z') + \mathbf{d}(z')) \cdot \mathbf{a}', z')] \right\}$$

$$\text{za podmienky: } c + \mathbf{p}(z) \cdot \mathbf{a}' = W$$

- ▶ princíp optimality
- ▶ funkcionálna rovnica pre  $V()$



# Problém spotřebitele

- ▶ za istých predpokladov:

- ▶ operátor

$$TV(W, z) = \max u(c) + \beta \mathbb{E}_{z'|z} V(W', z')$$

je kontrakciou na priestore funkcií  $\mathcal{V} \ni V$

- ▶ existuje jedinečné riešenie  $TV^* = V^*$
  - ▶ postupnosť iterácií  $V_{n+1} = TV_n$  konverguje k  $V^*$
- ▶ pre dané riešenie  $V$  vieme nájsť optimálne rozhodnutia z podmienok prvého rádu:

$$u'(c) = \lambda$$
$$\lambda p_i(z) = \beta \mathbb{E}_{z'|z} \left[ \frac{\partial V(W', z')}{\partial W} (p_i(z') + d_i(z')) \right]$$

# Problém spotrebiteľa

- ▶ z obáľkovej podmienky:  $\partial V / \partial W = \lambda = u'(c)$
- ▶ spolu:

$$u'(c(W, z))p_i(z) = \beta \mathbb{E}_{z'|z} [u'(c(W', z'))(p_i(z') + d_i(z'))]$$

- ▶ v inej notácii:

$$u'(c_t)p_{i,t} = \beta \mathbb{E}_t [u'(c_{t+1})(p_{i,t+1} + d_{i,t+1})]$$

- ▶ “Eulerova rovnica” (analógia s variačným počtom)
- ▶ dodatočný nákup  $\epsilon$  jednotiek  $i$ -tej akcie:
  - ▶ zníži úžitok dnes o  $u'(c_t)p_{i,t}\epsilon$
  - ▶ zvýši úžitok zajtra o  $u'(c_{t+1})(p_{i,t+1} + d_{i,t+1})\epsilon$
  - ▶ oba efekty sa musia rovnať (po diskontovaní a v očakavnej hodnote)

## Rovnovážne ceny

- ▶ pre dané ceny/dividendy, ER určuje optimálnu spotrebu
- ▶ naopak: aké ceny sú konzistentné s pozorovanou spotrebou?
- ▶ Lucas (1978)<sup>3</sup>:
  - ▶ jediným zdrojom v ekonomike sú “stromy” produkujúce náhodné výstupy  $d_{i,t}$
  - ▶ domácnosti vlastnia a obchodujú podiely k “stromom”
  - ▶ domácnosti sú identické: reprezentatívny spotrebiteľ
- ▶ v rovnováhe musia byť ceny práve také, aby domácnosť bola ochotná držať trhové portfólio  $\mathbf{a} = (1, 1, \dots, 1)$ 
  - ▶ t.j. spotreba je exogénne daná  $c_t = \sum_i d_{i,t} = c(z_t)$
- ▶ ER stále platí:

$$u'(c(z_t))p_i(z_t) = \beta \mathbb{E}_t [u'(c(z_{t+1}))(p_i(z_{t+1}) + d_i(z_{t+1}))]$$

---

<sup>3</sup>Asset prices in an exchange economy. Econometrica 46 (6)

## Rovnovážné ceny

- ▶ nech  $N = 1$  (1 strom),  $c(z) = d(z)$
- ▶ príklad 1: ak  $z_t$  je Markovov reťazec s  $J$  stavmi, dostávame systém  $J$  rovníc:

$$\forall j = 1, \dots, J :$$

$$u'(d(j))p(j) = \beta \sum_{j'=1}^J \pi_{j \rightarrow j'} u'(d(j'))(p(j') + d(j'))$$

- ▶ príklad 2: ak  $d(z) = \exp(z)$  a  $z_t$  je spojitý AR(1) proces  $z_{t+1} = \rho z_t + \sigma \epsilon_{t+1}$ , dostávame integrálnu rovnicu:

$$u'(e^z)p(z) = \beta \int u'(e^{z'}) (p(z') + e^{z'}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z' - \rho z)^2}{2\sigma^2}} dz'$$

# Rovnovážne ceny

- ▶ ER sa dá prepísať ako

$$1 = \mathbb{E}_t \left[ \underbrace{\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}}_{M_{t+1}} R_{t+1} \right]$$

- ▶ bezriziková úroková miera je známa v čase  $t$ :

$$1 = \mathbb{E}_t[M_{t+1}R_{t+1}^f] \Rightarrow R_{t+1}^f = 1/\mathbb{E}_t[M_{t+1}]$$

- ▶ pre akýkoľvek výnos platí:

$$1 = \mathbb{E}_t[M_{t+1}R_{t+1}] = \mathbb{E}_t[M_{t+1}]\mathbb{E}_t[R_{t+1}] + \text{Cov}_t[M_{t+1}, R_{t+1}]$$

$$\underbrace{\mathbb{E}_t[R_{t+1}] - R_{t+1}^f}_{\text{riziková prémia}} = \frac{-\text{Cov}_t[M_{t+1}, R_{t+1}]}{\mathbb{E}_t[M_{t+1}]}$$

## Rovnovážne ceny

$$\underbrace{\mathbb{E}_t[R_{t+1}] - R_{t+1}^f}_{\text{riziková prémia}} = \frac{-\text{Cov}_t[M_{t+1}, R_{t+1}]}{\mathbb{E}_t[M_{t+1}]}$$

- ▶ aktíva pre ktoré  $\text{Cov}_t[M_{t+1}, R_{t+1}] < 0$  majú kladnú prémii
  - ▶ výnosy sú nízke keď je hraničný úžitok vysoký
  - ▶ výnosy sú nízke keď je spotreba nízka
  - ▶ málo atraktívne pre spotrebiteľa  $\Rightarrow$  očakávaný výnos musí byť vyšší
- ▶ trhový výnos je korelovaný s agregátnou spotrebou  $\Rightarrow$  teória predpovedá kladnú rizikovú prémii
  - ▶ kvalitatívne v súlade s dátami
  - ▶ kvantitatívne?

## Equity premium puzzle

- ▶ Mehra & Prescott (1985)<sup>4</sup>: “equity premium puzzle”
- ▶ úžitková funkcia:  $u(C) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ 
  - ▶ t.j.  $\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = (c_{t+1}/c_t)^{-\gamma}$
- ▶ rast agregátnej spotreby/dividendy: 2-stavový Markovov reťazec

$$\frac{c_t}{c_{t-1}} = \begin{cases} 1.054 & (\text{expanzia}) \\ 0.982 & (\text{recesia}) \end{cases}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0.43 & 0.57 \\ 0.57 & 0.43 \end{bmatrix}$$

- ▶ ekonomika rastie, ale pomer  $\tilde{p}_t = p_t/d_t$  bude stacionárny:

$$1 = \mathbb{E}_t \left[ \beta \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \frac{1 + \tilde{p}_{t+1}}{\tilde{p}_t} \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right) \right]$$

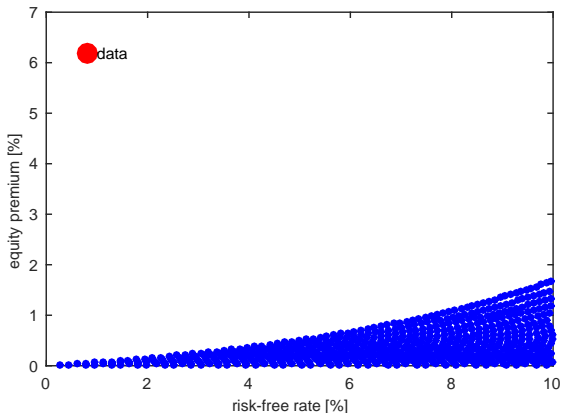
- ▶ prípustné hodnoty parametrov:  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in [0, 10]$

---

<sup>4</sup>The equity premium: A puzzle. Journal of Monetary Economics 15 (2)

# Equity premium puzzle

- ▶ zaujíma nás predikcia modelu pre priemernú rizikovú prémie a bezrizikový úrok:





## Equity premium puzzle

- ▶ v čom je problém?
- ▶ približne:

$$RP \approx Cov[M, R] = std(M) \times std(R) \times corr(M, R)$$

- ▶  $M$  má príliš malú volatilitu
- ▶  $M$  je funkciou  $C_t/C_{t-1}$ : agregátna spotreba je príliš hladká
- ▶ vysoká averzia k riziku
  - ▶ zvyšuje volatilitu  $M$
  - ▶ ale aj zvyšuje úroveň a volatilitu bezrizikového úroku
  - ▶ je nerealistická z mikroekonomického pohľadu

# Equity premium puzzle

- ▶ prečo nás to má trápiť?
- ▶ podcenenie ceny rizika vedie k podceneniu strát blahobytu z cyklických fluktuácií
  - ▶ Lucas (2003)<sup>5</sup>: reprezentatívna domácnosť je ochotná vymeniť max. 0.05% spotreby za eliminovanie fluktuácií
  - ▶ ťažko uveriteľné
- ▶ Eulerova rovnica je základným stavebným blokom väčšiny moderných makroekonomických modelov
  - ▶ napr. dynamická IS krivka v Novo-Keynesiánskych modeloch

---

<sup>5</sup>Macroeconomic Priorities. American Economic Review 93 (1)

# Produkcia

- ▶ v skutočnosti spotreba nepadá zo stromov, ale je výsledkom produkcie
- ▶ investovaním do kapitálových statkov je možné presúvať spotrebu v čase
- ▶ Eulerova rovnica však stále platí:

$$y_t = z_t k_t^\alpha$$
$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + y_t - c_t$$
$$u'(c_t) = \mathbb{E}_t \left[ \beta u'(c_{t+1})(1 - \delta + \alpha z_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1}) \right]$$

- ▶ stochastický model rastu
  - ▶ “výnos”: hraničný produkt kapitálu
- ▶ endogénna spotreba predstavuje dodatočnú výzvu
  - ▶ napr. vysoká averzia k riziku môže viesť domácnosti k veľmi hladkej spotrebe

# Navrhnuté riešenia

- ▶ úžitková funkcia
  - ▶ preferencia pre skoré odhalenie neistoty, preferencie s návykom
- ▶ proces pre agregátnu spotrebu
  - ▶ zriedkavé katastrofy
- ▶ predpoklad reprezentatívnej domácnosti
  - ▶ idiosynkratické šoky, limitovaná účasť na finančnom trhu
- ▶ predpoklad racionálnych očakávaní
  - ▶ nekompletné informácie, učenie, averzia k ambiguite
- ▶ behaviorálne chyby
  - ▶ teória prospektov, extrapolačný bias
- ▶ inštitucionálne faktory
  - ▶ frikcie vo finančnom sektore, kolaterálne reštrikcie
- ▶ ... a mnoho iných

## EZ preferencie

- ▶ úžitok separovateľný v čase:

$$V_t = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i u(c_{t+i}) \right] = u(c_t) + \beta \mathbb{E}_t[V_{t+1}]$$

- ▶  $\gamma$  kontroluje zakrivenosť úžitkovej funkcie cez čas aj riziko
- ▶ Epstein & Zin (1989)<sup>6</sup> preferencie:

$$V_t = \left\{ (1 - \beta)c_t^{1-\rho} + \beta \left( \mathbb{E}_t \left[ V_{t+1}^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \right)^{1-\rho} \right\}^{\frac{1}{1-\rho}}$$

- ▶  $\rho$  kontroluje sklon k vyhladzovaniu spotreby v čase
- ▶  $\gamma$  kontroluje averziu k riziku
- ▶ ak  $\rho < \gamma$ , spotrebiteľ preferuje skoré odhalenie neistoty

---

<sup>6</sup>Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework. *Econometrica* 57 (4)

## EZ preferencie

- ▶ SDF:

$$M_{t+1} = \beta \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\rho} \left( \frac{v_{t+1}}{\mathbb{E}_t[v_{t+1}^{1-\gamma}]^{\frac{1}{1-\gamma}}} \right)^{\rho-\gamma}$$

- ▶ závisí od spotreby aj hodnotovej funkcie
  - ▶ aj šoky bez priameho vplyvu na spotrebu môžu ovplyvňovať výnosy
  - ▶ správy o budúcej spotrebe, zmeny volatility, ...
- ▶ “dlhodobé riziká”

## Idiosynkratické riziko

- ▶ reprezentatívny spotrebiteľ  $\Rightarrow$  všetky domácnosti sú identické
  - ▶ alebo je možné poistiť každé individuálne riziko: “kompletné trhy”
- ▶ v realite čelia domácnosti idiosynkratickým rizikám ktoré sa nedajú obchodovať na finančných trhoch
  - ▶ napr. strata zamestnania
- ▶ rôzne domácnosti majú rôzne miery rastu spotreby
- ▶ jednoduchý model (Constantinides & Duffie, 1996)<sup>7</sup>:

$$\frac{c_{i,t+1}}{c_{i,t}} = \frac{c_{t+1}}{c_t} \times \exp(\eta_{i,t+1}), \quad \eta_{i,t+1} \sim \mathcal{N}(\cdot, \sigma_t^2)$$

- ▶  $\eta_{i,t+1}$  nekorelované v čase a medzi domácnosťami...
- ▶ ... ale rozptyl sa môže v čase meniť

---

<sup>7</sup>Asset Pricing with Heterogeneous Consumers. Journal of Political Economy  
104 (2)

## Idiosynkratické riziko

- ▶ SDF:

$$M_{t+1} = \beta \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \exp \left( \frac{1}{2} \gamma (1 + \gamma) \sigma_{t+1}^2 \right)$$

- ▶ prítomnosť idiosynkratického rizika
  - ▶ znižuje úrokové miery: efekt preventívnych úspor
  - ▶ ak sa mení v čase kontracyklicky, zvyšuje volatilitu SDF a rizikovú prémiiu



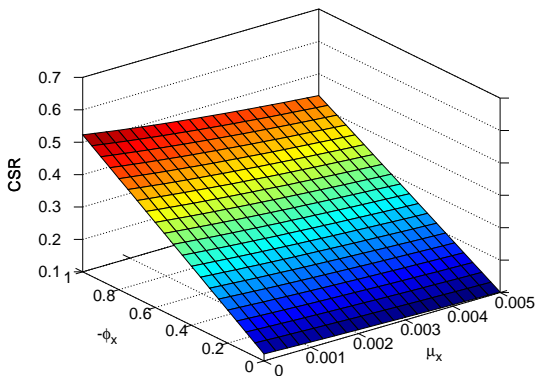
# Môj výskum

- ▶ v časti diz. práce sa venujem modelu:
  - ▶ s produkciou
  - ▶ EZ preferenciami
  - ▶ kontracyklickým idiosynkratickým rizikom
- ▶ Motivácia
  - ▶ správy o budúcom vývoji id. rizika zvyšujú rizikovú prémii
  - ▶ avšak zároveň ovplyvňujú dynamiku spotreby
- ▶ Výsledky
  - ▶ cyklické id. riziko zvyšuje nechuť spotrebiteľov k substitúcii spotreby v čase. . .
  - ▶ . . . čo môže negatívne ovplyvniť fit modelu na makroekonomické dáta. . .
  - ▶ . . . avšak vhodnou úpravou parametrov preferencií je možné zachovať dynamické vlastnosti modelu a dosiahnuť zároveň vysokú rizikovú prémii

- ▶ rozptyl id. rizika závisí od rastu agregátnej spotreby:

$$x_t = \mu_x + \phi_x(\Delta c_t - E[\Delta c_t])$$

- ▶ zaujíma nás vplyv na normalizovanú rizikovú prémiiu (Sharpe ratio)
  - ▶ (semi-)analytické výsledky z lineárnej aproximácie modelu (približne v zhode s presnejším numerickým riešením)



# Záver

- ▶ consumption-based asset pricing:
  - ▶ finančné výnosy by mali byť konzistentné s optimálnym správaním spotrebiteľa
  - ▶ aktíva s nízkym výnosom v “zlých časoch” (nízka spotreba) musia ponúknuť rizikovú prémiiu
- ▶ equity premium puzzle:
  - ▶ základné makroekonomické modely predpovedajú kvantitatívne príliš nízku rizikovú prémiiu
- ▶ stále aktívna oblasť výskumu
  - ▶ množstvo návrhnutých riešení
  - ▶ ale ktoré je/sú tie pravé?
  - ▶ dôraz sa presúva na skúmanie ďalších implikácií modelov
    - ▶ predpovedateľnosť výnosov
    - ▶ prierezové vlastnosti výnosov
    - ▶ rizikové prémie / úroky v rôznych časových horizontoch
    - ▶ ...