# Optimal Granularity for Portfolio Choice

Nicole Branger[1] Katarína Lučivjanská[2] Alex Weissensteiner[3]

[1]University of Münster, Nemecko

[2]Univerzita P.J. Šafárika v Košiciach, Slovensko

[3]Free University of Bolzano, Taliansko

11. apríl 2017
seminár Aká si mi krásna

# Úloha investora

- Statická úloha: klasická úloha hľadania vhodného rozloženia aktív (Markowitz, 1952; Tobin, 1958)
- Jedno bezrizikové aktívum a $N$ rizikových aktív s nadmernými výnosmi $r_t \sim N(\mu, \Sigma)$, rovnako a nezávisle rozdelené
- Investor hľadá kombináciu aktív (portfólio), pri ktorej maximalizuje svoju úžitkovú funkciu $U(w)$

$$\max_w \left( w'\mu - \frac{\gamma}{2} w'\Sigma w \right) \tag{1}$$

- $\gamma$ - parameter odporu k riziku
- $w'\mu$ - očakávaná výnosnosť portfólia
- $w'\Sigma w$ - rozptyl/variancia portfólia $S_0 S_u S_d$

# Úloha investora so známymi parametrami

- Ak investor pozná parametre, potom sú optimálne váhy jednotlivých aktív dané

$$w^* = \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}\mu \tag{2}$$

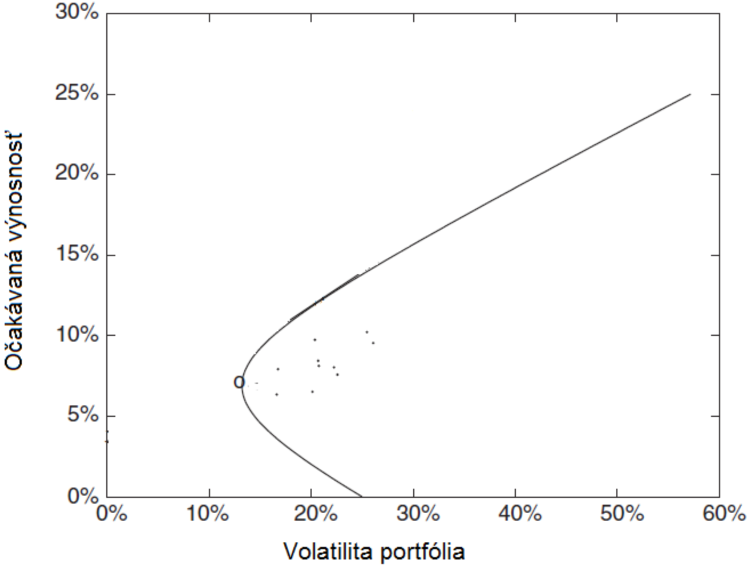
kde $1 - \mathbf{1}'w^*$ je časť investovaná do bezrizikového aktíva,

- s optimálnou očakávanou hodnotou úžitkovej funkcie

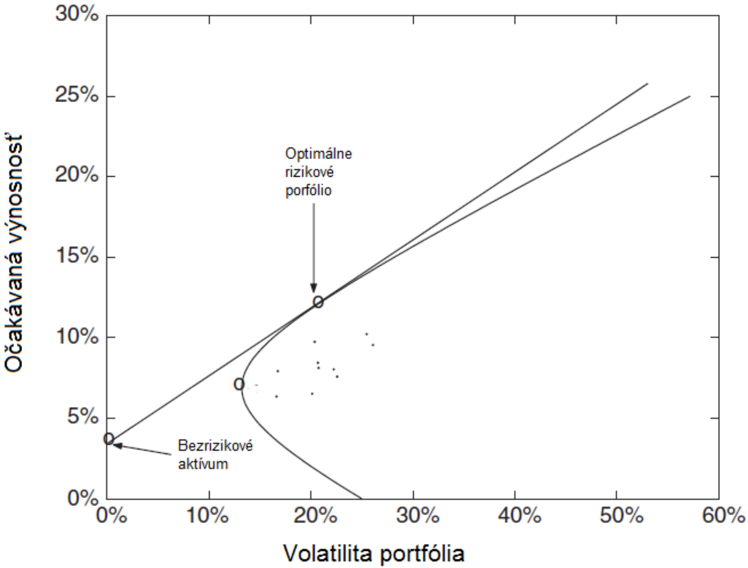
$$E[U(w^*)] = \frac{1}{2\gamma}\mu'\Sigma^{-1}\mu = \frac{\theta^2}{2\gamma} \tag{3}$$

kde $\theta$ je Sharpov pomer.

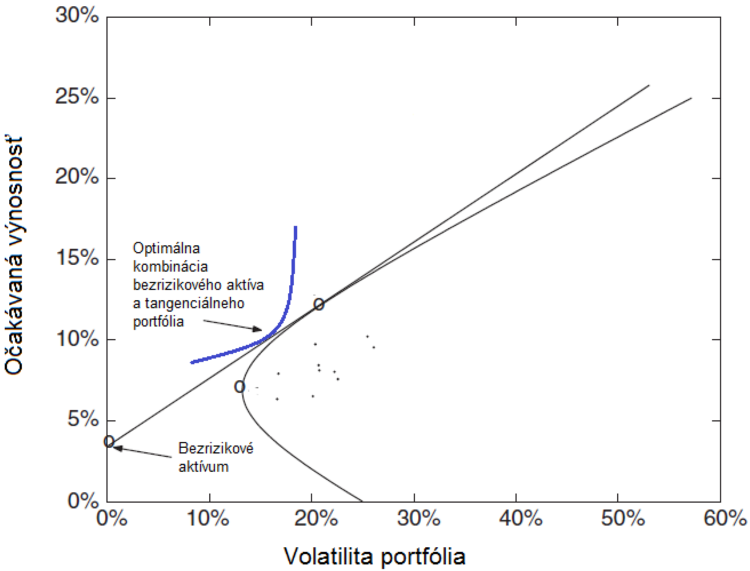
# Úloha investora: Množina prípustných portfólii z rizikových aktív



# Úloha investora: s bezrizikovým aktívom



# Úloha investora: Optimálne portfólio



# Neistota v parametroch

- Hlavnou nevýhodou mean-variance optimalizácie je **neistota v parametroch** modelu
- Nepoznáme skutočné, s odhadnutými parametrami modelu pracujeme akoby boli skutočné (Plug-in metóda)
- Priemerné výnosy aktív a ich variancie sú odhadnuté s nedostatočnou presnosťou
- V praxi: Ad hoc 1/N metóda, kde rizikovým aktívam priradíme rovnaké váhy dáva lepšie výsledky, hlavne pri úlohách s 10 a viac aktívami

# Stopy a dôkazy

- Chopra a Ziemba (1993) - simulácie, straty z neznámych očakávaných výnosov sú 10krát ako vyššie ako z variancií a kovariancií
- Kan a Zhou (2007) - teoreticky odvodia vzorce pre straty spôsobené odhadovaním parametrov
- DeMiguel a kol. (2007) - tisíce mesačných dát potrebných na prekonanie 1/N pravidla

# Navrhované riešenia

- Minimalizujeme iba rozptyl portfólia, ktorý nie je tak nepresne odhadnutý (Jaganathan a Ma, 2003)
- Zmršťovanie (shrinking) očakávaných výnosov a/alebo kovariančnej matice (Ledoit a Wolf, 2004; Garlappi a kol., 2007)
- Kombinácie viacerých pravidiel s nekorelovanou chybou odhadu (Kan a Zhou, 2007)
  - Kombinácia bezrizikového aktíva, tangenciálneho portfólia a portfólia s min. rozptylom (Kan a Zhou, 2007)
  - Kombinácia bezrizikového aktíva, tangenciálneho portfólia, portfólia s min. rozptylom a 1/N stratégie (Tu a Zhou, 2009)

# Naše riešenie

- Kombinácia ad-hoc prístupu a *užitočnej* informácie z optimalizácie
- Nájdime optimálny počet aktív (optimálna granularita), pre ktoré sa oplatí optimalizovať
- Poskupinkujme podobné aktíva do optimálneho počtu skupín
- Menším počtom aktív znížime stratu z chýb vzniknutých pri odhadoch
- Zároveň si ponecháme výhody optimalizácie (s menším počtom aktív)
- Faktory vplývajúce na optimálnu granularitu

# Program nadnes

1. Vlastnosti našej stratégie pomocou simulácií
2. Teoretické výsledky
3. Výsledky s reálnymi dátami

# Úloha investora s neznámymi parametrami

- Ak je očakavaný výnos a/alebo variancia neznáma, môžeme ju odhadnúť, napr. maximalizáciou funkcie vierohodnosti

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t \tag{4}$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (r_t - \hat{\mu})'(r_t - \hat{\mu}) \tag{5}$$

- $T$ je počet pozorovaní, ktoré použijeme na odhad
- Potom odhad na základe dát je z rozdelenia

$$\hat{\mu} \sim N(\mu, \Sigma/T) \tag{6}$$

$$\hat{\Sigma} \sim W_N(T-1, \Sigma)/T \tag{7}$$

# Úloha investora s neznámymi parametrami

- Ak nepoznáme iba $\mu$, vieme ľahko vypočítať ako sa zmení funkcia úžitku

$$\begin{aligned} E(U(\hat{w})) &= E(\hat{w})\mu - \frac{\gamma}{2}E(\hat{w}'\Sigma^{-1}\hat{w}) \\ &= \frac{1}{\gamma}\mu`\Sigma^{-1}\mu - \frac{1}{2\gamma}E(\hat{\mu}'\Sigma^{-1}\hat{\mu}) \\ &= \frac{1}{\gamma}\mu`\Sigma^{-1}\mu - \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{N + T\mu'\Sigma^{-1}\mu}{T}\right) \\ &= \frac{\theta^2}{2\gamma} - \frac{N}{2\gamma T} \end{aligned}$$

obe neznáme

- Riziko spojené s odhadnutím parametrov spôsobí stratu na hodnote úžitkovej funkcie, ktorá
  - rastie s počtom aktív
  - klesá s počtom pozorovaní použitých na odhad
- Ak máme málo dát alebo príliš veľa aktív, 1/N pravidlo dáva lepšie výsledky ako optimalizácia

# Simulácie

- 30 aktív, výnosností simulované z rovnomerného rozdelenia
- Očakávané výnosnosti aj variancie sú neznáme pre investora, odhaduje ich na základe 40 rokov mesačných dát (50000 simulácií)
- Zjednodušenie: všetky výnosnosti majú rovnaký rozptyl, sú nekorelované, očakávané výnosnosti su rovnomerne rozdelené v danom intervale
- Parametre sú zvolené tak, aby boli rovnaké ako parametre 30 Fama-French sektorovým portfóliám
- Hodnota úžitkovej funkcie pri odhade parametrov je

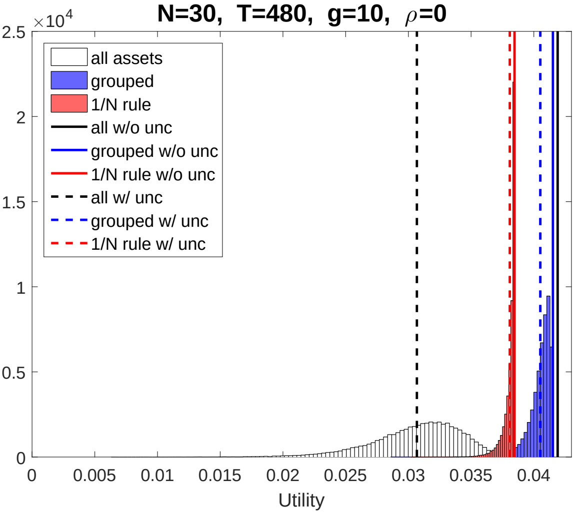
$$U(\hat{w}) = \hat{w}'\mu - \frac{\gamma}{2}\hat{w}'\Sigma\hat{w} \tag{8}$$

# Simulácie

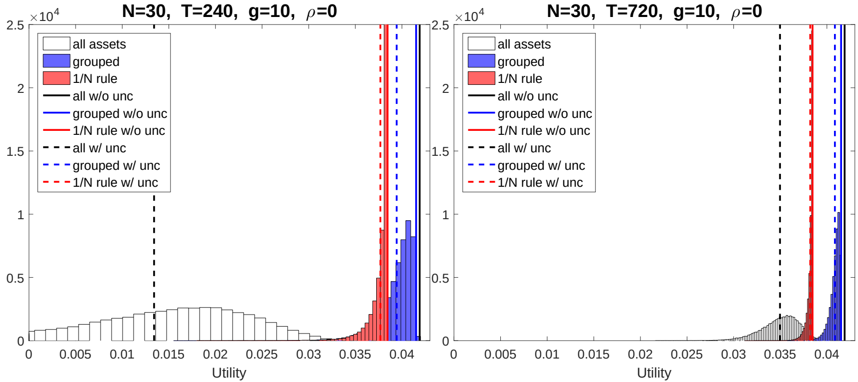
Stratégie

1. Optimalizačná úloha naprieč všetkými aktívami s použitím iba odhadnutých parametrov
2. Optimalizačná úloha naprieč poskupinkovaným aktívam s použitím iba odhadnutých parametrov (veľkosť skupiny $g = 10$, počet skupín $N/g = 3$)
3. jednoduché 1/N pravidlo pre rizikové aktíva

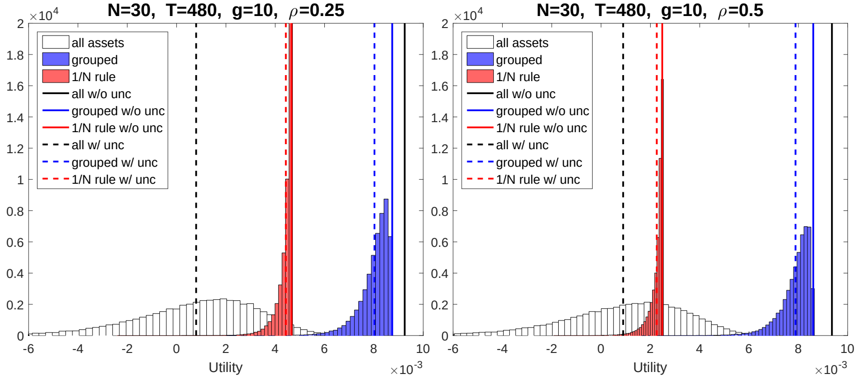
# Úžitková funkcia pre stratégie



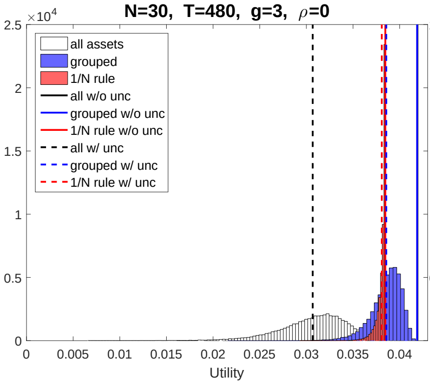
# Citlivosť na počet skupín $T$

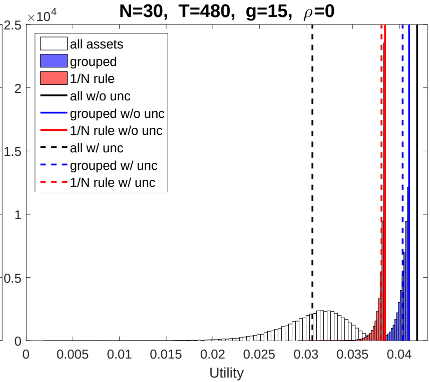


# Citlivosť na korelačný koeficient $\rho$



# Citlivosť na veľkosť skupiny $g$



# Analytické výsledky o optimálnej granularite

- Zjednodušený model pre traktabilitu
- Zameranie na neznáme očakávané výnosnosti, rozptyl je známy (Chopra a Ziemba, 1993)
- Optimálne váhy sú založené na odhadnutých, nie skutočných parametroch
- Potom, očakávaná hodnota úžitku je

$$E[U(\hat{w})|\Sigma] = \frac{\mu' \Sigma^{-1} \mu}{2\gamma} - \underbrace{\frac{N}{2\gamma T}}_{\text{strata}} \tag{9}$$

# Optimálna granularita

- Optimalizácia len cez redukovanú množinu (poskupinkovaných aktív): $N \to \bar{N} = N/g$
- Veľkosť skupiny $g$, rovnaké váhy vrámci skupiny
- Skupinkovanie prináša zlepšenie, ak

$$\frac{\theta^2}{2\gamma} - \frac{N}{2\gamma T} \leq \frac{\bar{\theta}^2}{2\gamma} - \frac{\bar{N}}{2\gamma T} \tag{10}$$

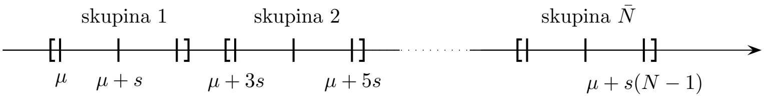
kde $\bar{\theta}^2 = \bar{\mu}'\bar{\Sigma}^{-1}\bar{\mu}$ je druhá mocnina Sharpovho pomeru pre poskupinkované dáta

$\rightarrow$ strata kvôli odhadu parametrov $N > \bar{N}$

$\rightarrow$ výhody z optimalizácie sú nižšie $\theta > \bar{\theta}$

# Zjednodušený prípad 1

- Rovnaká variancia pre každé aktívum $\sigma^2$ (skalár)
- Nulový korelačný koeficient
- Rovnomerne rozložený očakávaný výnos, s rovnakým krokom $s$: $\mu_i = \mu + s(i-1)$
- Skupinkovanie: znížiť počet aktív zoskupením aktív s podobným výnosom



# Výsledky

- Umocnený Sharpov pomer pri skupinkovaní

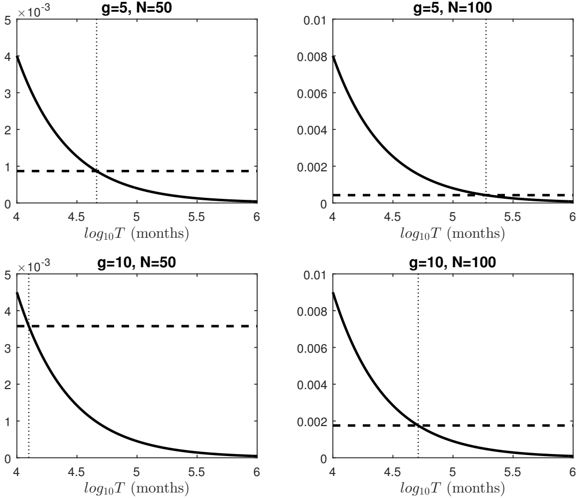
$$\bar{\theta}^2 = \frac{N}{\sigma^2}\left[\mu^2 + \mu s(N-1) + \frac{s^2}{12}\left(2(N-1)(2N-1) + \boxed{1-g^2}\right)\right] \tag{11}$$

- Pôvodná množina aktív verzus skupinkovanie

$$\underbrace{\theta^2 - \bar{\theta}^2}_{\substack{\text{Strata z menšej diverzifikácie} \\ \text{pri skupinkovaní}}} < \underbrace{\frac{N-\bar{N}}{T}}_{\substack{\text{Nárast užitočnosti} \\ \text{vdaka menšej chybe odhadu}}} \tag{12}$$

$$\frac{N}{\sigma^2}\frac{(g^2-1)s^2}{12} < \frac{N(1-1/g)}{T} \tag{13}$$

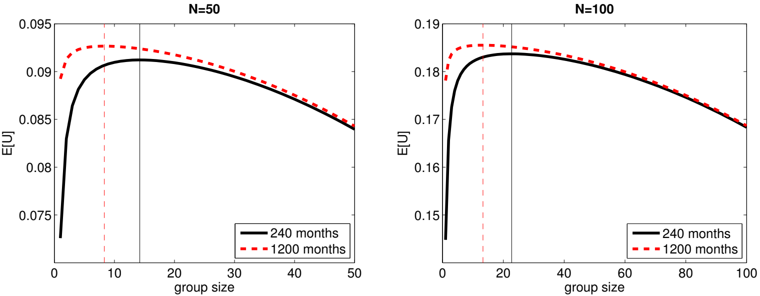
# Zmeny v diverzifikácii a neistote odhadov




Kalibrácia: $\mu_{max} - \mu_{min} = 0.01/12, \sigma^2 = 0.04/12, \rho = 0$; Zmeny v diverzifikácii (čiarkovane) a neistote odhadov (plná čiara) v závislosti od počtu pozorovaní

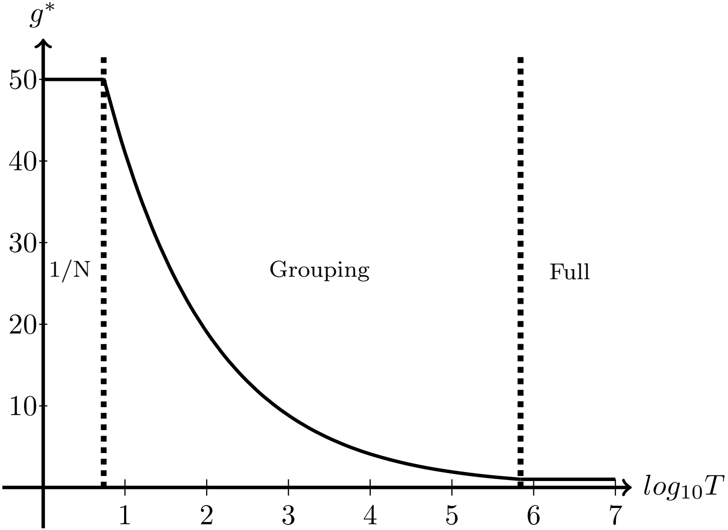
# Optimálna veľkosť skupiny

$$\frac{\partial E[U(\hat{w})|\Sigma]}{\partial g} = 0 \rightarrow g^* = \sqrt[3]{\frac{6\sigma^2}{s^2 T}} \tag{14}$$




Kalibrácia: $\mu_{max} - \mu_{min} = 0.01/12, \sigma^2 = 0.04/12, \rho = 0$

# Optimálna veľkosť skupiny



# Zjednodušený prípad 2

- Rovnaká variancia pre každé aktívum $\sigma^2$
- **Nové**: Rovnaký korelačný koeficient $\rho$ pre každy pár aktív
- Rovnomerne rozložený očakávaný výnos, s rovnakým krokom $s$: $\mu_i = \mu + s(i-1)$

# Zjednodušený prípad 2

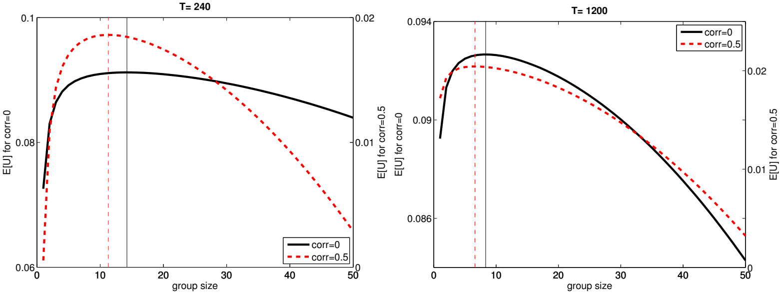
- Rovnaká variancia pre každé aktívum $\sigma^2$
- **Nové**: Rovnaký korelačný koeficient $\rho$ pre každy pár aktív
- Rovnomerne rozložený očakávaný výnos, s rovnakým krokom $s$: $\mu_i = \mu + s(i-1)$
- Pôvodná množina aktív verzus skupinkovanie

$$\frac{N}{\sigma^2}\frac{(g^2-1)s^2}{12\boxed{(1-\rho)}} < \frac{N(1-1/g)}{T} \tag{15}$$

- Optimálna veľkosť skupiniek

$$g^* = \sqrt[3]{\frac{6\sigma^2(1-\rho)}{s^2 T}} \tag{16}$$

# Nenulová párová korelácia: Optimálna veľkosť skupiny

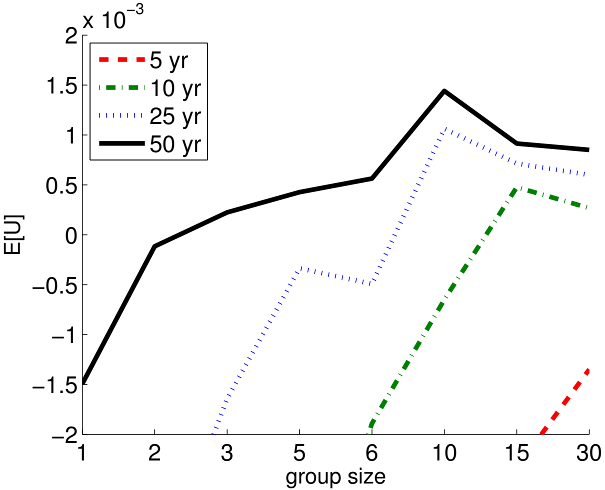



Kalibrácia: $\mu_{max} - \mu_{min} = 0.01/12, \sigma^2 = 0.04/12, \gamma = 5$

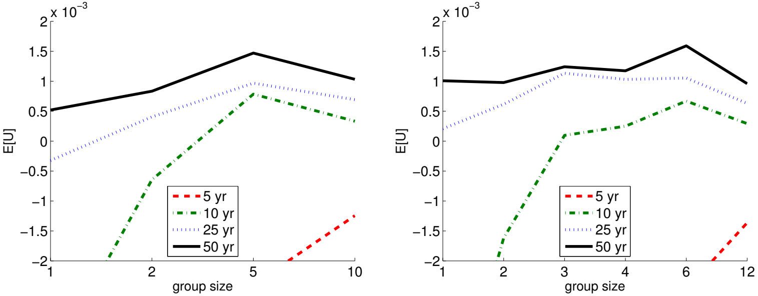
# Aplikácie s reálnymi dátami

- 30 Fama-French sektorových portfólií, mesačné dáta 1926M7-2013M7
- Hľadáme očakávaný úžitok pri roznych veľkostiach skupín
  - $g = 1$: celková optimalizácia,
  - $g = N$: 1/N pravidlo, a
  - ostatné možné veľkosti skupiniek $g$: skupinkovanie
- Aktíva zoskupené podľa biet z jednofaktorového modelu
- Porovnanie s teoreticky odvodenou hodnotou $g$

# 30 Fama-French sektorových portfólií



# 10 a 12 Fama-French sektorových portfólií




| Dĺžka $T$ | 5 rokov | 10 rokov | 25 rokov | 50 rokov |
|---|---|---|---|---|
| 30 FF sektorových portfólií | 15 | 10 | 10 | 6 |
| 12 FF sektorových portfólií | 6 | 6 | 4 | 4 |
| 10 FF sektorových portfólií | 5 | 5 | 5 | 5 |

# Analýza out-of-sample

- Kažý mesiac investor vypočíta teoreticky optimálnu veľkosť skupín na základe dostupných dát
- Výkonnosť (očakávaný užitok a Sharpov pomer) stratégie vzhľadom na alternatívne stratégie
  - feature selection method by Bjerring et al. (2016)
  - trojfondové pravidlo rule od Kan a Zhou (2007)
  - štvorfondové pravidlo od Tu a Zhou (2011)
  - optimalizácia cez podpriestor faktorov od Chen a Yuan (2016)
  - optimilizácia s dodatočnými podmienkami od Li (2015)
  - 1/N pravidlo bez bezrizikového aktíva

# Analýza out-of-sample: Výsledky

| | Full | **Grouping** | Naive | Bjerring | Kan | Tu | Chen | Li | Naive w/o |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Panel A: 12 sektorových portfólií | | | | | | | | | |
| SR | 0.1460 | **0.1853** | 0.1515 | 0.1361 | 0.1644 | 0.1774 | 0.1368 | 0.1638 | 0.1591 |
| EU | 0.0020 | **0.0032** | 0.0019 | 0.0018 | 0.0027 | 0.0031 | 0.0016 | 0.0024 | 0.0023 |
| Panel B: 30 sektorových portfólií | | | | | | | | | |
| SR | 0.1340 | **0.1964** | 0.1443 | 0.1513 | 0.1731 | 0.1816 | 0.1288 | 0.1444 | 0.1526 |
| EU | 0.0002 | **0.0038** | 0.0018 | 0.0023 | 0.0030 | 0.0033 | 0.0016 | 0.0019 | 0.0018 |
| Panel C: 25 Size- a Book-to-Market Portfolios | | | | | | | | | |
| SR | 0.2777 | **0.1735** | 0.1500 | 0.2727 | 0.2600 | 0.2597 | 0.2039 | 0.1528 | 0.1584 |
| EU | 0.0075 | **0.0025** | 0.0017 | 0.0047 | 0.0054 | 0.0055 | 0.0034 | 0.0013 | 0.0018 |
| Panel D: 20 národných portfólií | | | | | | | | | |
| SR | 0.0586 | **0.1076** | 0.0989 | 0.0991 | 0.1141 | 0.1095 | 0.0916 | 0.0955 | 0.1093 |
| EU | -0.0018 | **0.0008** | 0.0005 | 0.0007 | 0.0013 | 0.0001 | 0.0004 | 0.0008 | -0.0010 |

# Záverečné poznámky

- Negatívne dôsledky z nedostatočne presných odhadov parametrov môžu byť zjemnené zoskupením podobných aktív.
- Aplikovaním optimálnej veľkosti skupín vyvážime výhody diverzifikácie z optimalizácie a strát z odhadov
- Skupinkovanie dáva lepšie výsledky ako 1/N pravidlo pri stovkách mesačných dát

Plán do budúcna

- Zmierniť predpoklady v teoretickom modeli
- Pravidlá pre zoskupovanie
- Očakávané výnosy meniace sa v čase

Ďakujem za Vašu pozornosť.

Otázky a pripomienky sú vítané!

# Očakávaný úžitok ak parametre $\mu$ a $\Sigma$ nepoznáme

$$E[U(\hat{w})] = k_1 \frac{1}{2\gamma}\mu'\Sigma^{-1}\mu - \frac{NT(T-2)}{2\gamma(T-N-1)(T-N-2)(T-N-4)} \tag{17}$$

kde

$$k_1 = \left(\frac{T}{T-N-2}\right)\left(2 - \frac{T(T-2)}{(T-N-1)(T-N-4)}\right) < 1. \tag{18}$$

spat