Je možné zabezpečiť medzigeneračnú spravodlivosť v ekonomike s vyčerpateľnými zdrojmi?

Rudolf Zimka

Obsah

1. Trochu histórie
2. Základné výsledky
3. Príspevok slovenských matematikov
3. Záver

1 História

Ekonomiky na celom svete v súčasnej dobe nemôžu existovať bez využívania vyčerpateľných prírodných zdrojov, ako je nafta, zemný plyn, zlato, striebro, meď, atď.

Už ale viac ako storočie dochádza k obrovskému plytvaniu týmito vzácnymi zdrojmi.

NEMYSLÍME NA NAŠE DETI, NA BUDÚCE GENERÁCIE

PREJEDÁME TO, ČO BY SME MALI NECHAŤ PRE NAŠE DETI, PRE BUDÚCE GENERÁCIE

Harold Hotelling bol prvým významným ekonómom, ktorý verejne poukázal na tento problém.

Hotelling, H.: The Economics of Exhaustible Resources, Journal of Political Economy, 1931.

Hotelling navrhol nasledujúci postup, ktorý by mal zabrániť plytvaniu vzácnymi zdrojmi:

Ťažba vyčerpateľného prírodného zdroja by sa mala realizovať takým spôsobom, aby sa príjem $P(t)$ *z jeho predaja rovnal úrokovej miere* $\delta(t)$.

Matematické vyjadrenie Hotellingovho návrhu je dané vzťahom

$$\frac{\frac{dP(t)}{dt}}{P(t)} = \delta(t).$$

Tento vzťah je dnes známy ako **Hotellingovo pravidlo** a často sa používa pri analýzach efektívnosti rôznych činností.

Cieľom rozumnej ekonomiky by malo byť zabezpečovanie slušnej životnej úrovne každého občana, každej generácie.
Kvalitu životnej úrovne občana (generácie) vyjadrujeme funkciou spotreby $\boldsymbol{c(t)}$ alebo funkciou užitočnosti $\boldsymbol{u(c(t))}$.
Ako prvý začal otázku životnej úrovne spoločnosti vzhľadom na spotrebu rigorózne skúmať **Frank Ramsey** v roku 1928. V článku

Frank P. Ramsey: A mathematical theory of savings, Economic Journal, 1928

sa zaoberal otázkou, ako zabezpečiť optimálnu hodnotu funkcie užitočnosti $u(c(t))$.

Ramsey argumentoval na základe etických princípov, že hodnota užitočnosti spotreby budúcich generácií by mala byť rovnaká ako hodnota užitočnosti spotreby súčasnej generácie. Preto v svojich úvahách odmietal používať diskontný faktor.

Ak $u\big(c(t)\big) \geq a > 0$, potom

$$\int_0^{\infty} u\big(c(t)\big)\,dt \geq \int_0^{\infty} a\,dt = \infty.$$

Ekonómovia bežne používajú v takýchto úvahách diskontný faktor

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\, u\big(c(t)\big)\,dt.$$

Ramsey vyriešil problém dosiahnutia najvyššej hodnoty funkcie užitočnosti nasledujúcim spôsobom:

c_B – horná hranica najvyššieho blaha (šťastia) v spotrebe - the bliss - the highest happiness

$B = u(c_B)$ – hladina blaha - bliss level

$$\min R = \int_0^\infty [B - u(c)]\, dt$$

za podmienky $f\big(k(t)\big) = c(t) + \dot{k}(t)$,

$k(t)$ – množstvo kapitálu, $f\big(k(t)\big)$ – produkčná funkcia.

Ramsey odvodil nutnú podmienku pre existenciu hľadaného riešenia:

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{du(c)}{dc}\right)}{\frac{du(c)}{dc}} = \frac{df(k)}{dk}\ .$$

Ekonomicky to znamená, že výnosnosť funkcie užitočnosti sa rovná hodnote veľkosti prírastku produkčnej funkcie za jednotku času.

Ramsey vo svojich úvahách neuvažoval vyčerpateľné zdroje.

Tento originálny Ramseyho prístup pri skúmaní životnej úrovne obyvateľstva nebol ďalšími ekonómami využívaný po niekoľko desaťročí. Až keď ruský matematik Pontryagin so svojimi spolupracovníkmi zaviedol Princíp maxima v teórii optimálneho riadenia, Ramseyho myšlienka začala byť využívaná v optimalizačných úlohách.

Ramsey v svojich úvahách nebral do úvahy rozdiely v spotrebe medzi jednotlivými osobami, prípadne generáciami. Chudoba jednej osoby (generácie) bola kompenzovaná bohatstvom inej osoby (generácie).

John Rawls – filozof morálky, sociálnej spravodlivosti a politiky vo svojej slávnej knihe

Rawls, J.: *A theory of Justice*, Harward University Press, 1971,

silne kritizoval Ramseyho prístup, v ktorom nebral vôbec do úvahy potreby najchudobnejších. Rawls hovoril, že je potrebné zvyšovať životnú úroveň celej spoločnosti, a navrhol takýto princíp:

$[u(c_1), u(c_2), \dots, u(c_n), \dots]$ – užitočnosti jednotlivcov (generácií)
Potom maximalizovanie životnej úrovne spoločnosti W znamená

$$W = \max \min \left(u(c_1), u(c_2), \dots, u(c_1) \right)$$

Rawls bol ale dosť pesimistický v pohľade, či je táto úloha riešiteľná. Rawls napísal:

I believe that it is not possible, at present anyway, to define precise limits on what the rate of savings should be. How the burden of capital accumulation and of raising the standard of civilization is to be shared between generations seems to admit of no definite answer.

Verím, že nie je možné, v súčasnej dobe v každom prípade, určiť presné limity na to, aká by mala byť miera úspor. Na otázku, v akom rozsahu by sa mali jednotlivé generácie podielať na akumulácii kapitálu a zvyšovaní životnej úrovne civilizácie, zdá sa, nemáme definitívnu odpoveď.

2 Základné výsledky

Ako prvý reagoval na pesimistický názor J. Rawlsa **R. M. Solow**

Solow, R. M.: Intergenerational Equity and Exhaustible resources, Review of Economic Studies, 1974.

Solow uvažoval Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu s jedným kapitálom $K(t)$ a s jedným prírodným zdrojom $S(t)$

$$f(K,L,R) = L^g K^{1-g-h} R^h, \quad R - \text{miera ťažby prírodného zdroja.}$$

Solowom získané výsledky:

1. Našiel podmienky na parametre g a h, ktoré zabezpečujú konštantnú kladnú spotrebu $C(t) = C_0$.
2. Našiel cestu, pomocou ktorej je možné získať maximálne C_0.
3. Vyšetril aj prípady s predpokladom populačného rastu a technického pokroku v Cobb-Douglasovej produkčnej funkcii.

Solow pri riešení úlohy odvodil nasledujúci systém nelineárnych rovníc:

$$\dot{k} = k^{1-g-h} r^h - c_0,$$
$$\dot{r} = \frac{(1-g-h)}{h-1} \frac{c_0}{k} r,$$

$$k(t) \geq 0, r(t) \geq 0, c_0 > 0, \int_0^\infty r(t)\, dt = \overline{S}.$$

Matematici Frederic Wan a Louis Howard z Massachusetts Institute of Technology pomohli Solowovi nájsť riešenie tohto systému.

Solowov článok mal obrovský vplyv na ďalší vývoj v tejto oblasti. Solow ukázal, že úlohy typu, ktorý sformuloval Rawls sa dajú riešiť. Tento poznatok bol výbornou motiváciou pre ďalších matematických ekonómov, ktorí sa zaoberali touto problematikou.

Solow získal v roku 1987 Nobelovu cenu za výsledky v teórii dynamických modelov ekonomického rastu.

Ekonómovia, skúmajúci ekonomiky s obnoviteľnými a vyčerpateľnými zdrojmi hľadali najmä podmienky, ktoré garantovali konštantnú funkciu spotreby $c(t)$ alebo konštantnú funkciu užitočnosti $u\big(c(t)\big)$.

Nasledujúcim významným príspevkom k tejto problematike bol výsledok **Johna Hartwicka** v článku

Hartwick, J. M.: Intergenerational Equity and the Investing of Rents from Exhaustible Resources, American Economic Review, 1977.

Hartwick skúmal ekonomiku s jedným obnoviteľným kapitálom k a s jedným vyčerpateľným zdrojom s. Vývoj týchto veličín je opísaný systémom

$$\dot{k} = f(k,r) - c,$$
$$\dot{s} = -r,$$

$f(k,r)$ – rastúca a konkávna, $\int_0^\infty r(t)\,dt = \bar{S}$.

Hartwickov výsledok:

Predpokladajme, že ťažba prírodného zdroja s je efektívna (Hotellingovo pravidlo).

If all the rent from the exhaustible resource is used for the accumulation of the renewable capital k *then the consumption* $c(t)$ *is constant over time.*

Ak celý zisk (dôchodok, renta) z prírodného zdroja s je použitý na akumuláciu (navýšenie) obnoviteľného kapitálu k, potom spotreba $c(t)$ je konštantná pre všetky $t \geq 0$.

Matematicky sa tento výsledok vyjadrí vzťahom

$$\dot{k} = f_r(k,r)r.$$

Hartwickov výsledok je v literatúre známy ako **Hartwickovo pravidlo** (Hartwick´s rule) a je jedným z najviac citovaných výsledkov v tejto oblasti.

Ďalšie hodnotné výsledky získali **A. Dixit, P. Hammond a M. Hoel** v práci

Dixit, A., Hammond, P., Hoel, M.: On Hartwick´s Rule for Regular Maximin Paths of Capital Accumulation and Resource Depletion, Review of Economic Studies 47, 1980.

Označme:

$\xi(t)$ – cena jednotky obnoviteľného kapitálu

$\psi(t)$ – cena jednotky vyčerpateľného prírodného zdroja

Prvý výsledok

Ak hodnota čistých investícií do obnoviteľného kapitálu a prírodného zdroja je nulová na intervale $[0, \infty)$, tak spotreba $c(t)$ je konštantná.

$$(\xi \dot{k} + \psi \dot{s} = \xi \dot{k} - \psi r = 0) \Rightarrow (c(t) = \text{ constant})$$

Tento výsledok je v literatúre známy ako

Dixit, Hammond and Hoel´s rule.

Uvažujme teraz ekonomiku s

$\mathrm{k} = (\mathrm{k}_1, \dots, \mathrm{k}_\mathrm{n})$ – obnoviteľnými kapitálovými sektormi,
$\mathrm{s} = (\mathrm{s}_1, \dots, \mathrm{s}_\mathrm{m})$ – vyčerpateľnými prírodnými zdrojmi,
$\mathrm{c} = (\mathrm{c}_1, \dots, \mathrm{c}_\mathrm{n})$ – spotrebami obnoviteľných kapitálov,
$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_\mathrm{n})$ – cenami obnoviteľných kapitálov,
$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_\mathrm{m})$ – cenami prírodných zdrojov,

pričom vývoj k a s je daný systémom

$$\dot{k}_i = f^i(k, r) - D_i(k_i) - c_i \equiv F^i(k, r, c), \quad i = 1, \dots, n,$$
$$\dot{s}_j = -r_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Druhý výsledok

Ak hodnota čistých investícií do obnoviteľných kapitálov a prírodných zdrojov je nezáporná konštanta na intervale $[0, \infty)$, tak funkcia užitočnosti $u(c(t))$ je konštantná.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \dot{k}_i + \sum_{j=1}^{m} \psi_j \dot{s}_j = E, E \geq 0\right) \Rightarrow \left(u(c(t)) - \text{ constant}\right)$$

Tento výsledok je v literatúre známy ako

Dixit, Hammond and Hoel´s generalized rule.

W. Buchholz, S. Dasgupta and T. Mitra ukázali v článku

Buchholz, W., Dasgupta, S., Mitra, T.: Intertemporal Equity and Hartwick´s Rule in an Exhaustible Resource Model, Scandinavian Journal of Economics, 2005,

že v prípade jedného obnoviteľného kapitálu k a jedného prírodného zdroja s je možný taktiež obrátený postup.

Tento výsledok je v literatúre známy ako

Buchholz, Dasgupta and Mitra´s converse rule.

Buchholz, Dasgupta and Mitra´s converse rule

$$(c(t) = \text{constant}) \wedge \left(\frac{\frac{d}{dt}\left(f_r(k,r)\right)}{f_r(k,r)} = f_k \right) \wedge \left(\beta = \inf_{\{k,r\}} \frac{\mathrm{r} f_r}{\mathrm{f}} > 0 \right)$$

$$\Rightarrow \left[\dot{k} = f_r(k,r) r \right]$$

Hartwick´s rule

$$\left[\dot{k} = f_r(k,r) r \right] \wedge \left(\frac{\frac{d}{dt}\left(f_r(k,r)\right)}{f_r(k,r)} = f_k \right) \Rightarrow (c(t) = \text{constant})$$

Otvorený problém: Nájsť podmienky pre konverziu Hartwickovho pravidla vo viac-dimenzionálnom prípade.

3 Príspevky slovenských matematikov

Na Slovensku sa problematike medzigeneračnej spravodlivosti a rozumného hospodárenia so vzácnymi nerastnými surovinami posledné roky venujú Mgr. Ing. Pavol Jurča, PhD. z Národnej banky Slovenska a prof. RNDr. Anton Dekrét, DrSc.

P. Jurča sa v dizertačnej práci

Sustainability in Models of Optimal Economic Growth, 2010,

venoval dynamickým modelom ekonomík s obnoviteľnými kapitálmi a vyčerpateľnými prírodnými zdrojmi. Urobil prehľad a zjednotil najvýznamnejšie výsledky, týkajúce sa Hartwickovho pravidla. Niektoré známe výsledky zovšeobecnil, niektoré dôkazy zjednodušil, pričom využíval najmä výsledky z teórie optimálneho riadenia. V práci získal taktiež niekoľko pekných výsledkov priamo z teórie optimálneho riadenia.

Viaceré problémy v ekonomikách s obnoviteľnými a vyčerpateľnými zdrojmi vedú na optimalizačné úlohy. Účinnou metódou pri ich riešení je Pontryaginov princíp maxima z teórie optimálneho riadenia. Tento princíp využíva kotangenciálne predĺženie vektorových polí.

A. Dekrét začal skúmať, aké sú možnosti využitia týchto predĺžení aj v obecnejších prípadoch bez požiadavky na optimalizáciu. Ukazuje sa, že takýmto prístupom sa dajú odvodiť, často priamejšou cestou, nielen už známe výsledky, ale v niektorých prípadoch získať aj ich rozšírenia. Tento prístup je vhodný najmä v prípade viac-dimenzionálnych ekonomík.

Uvažujme ekonomiku opísanú systémom diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} &\dot{k}_i = f^i(k,r) - D_i(k_i) - c_i \equiv F^i(k,r,c), \qquad i = 1,\ldots,n, \\ &\dot{s}_j = -r_j, \quad j = 1,\ldots,m, \end{aligned} \tag{1}$$

Predpokladajme: $\left(r(t), c(t)\right)$ – môžeme voliť –riadiace premenné,

$\varepsilon(t) = \left(r(t), c(t)\right)$ –riadiaca cesta,

$\left(k(t), s(t)\right)$ – vývoj je určený výberom $\varepsilon(t)$ a systémom (1)

Kotangenciálne predĺženie systému (1) je

$$\dot{k}_i = F^i(k,r,c) = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \qquad \dot{\xi}_i = -\frac{\partial H}{\partial k_i}, \qquad i = 1,\dots,n,$$
$$\dot{s}_j = -r_j = \frac{\partial H}{\partial \psi_j}, \qquad \dot{\psi}_j = -\frac{\partial H}{\partial s_j}, \qquad j = 1,\dots,m,$$

$$H(k,s,\xi,\psi,c,r) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i F^i(k,r,c) - \sum_{j=1}^{m} \psi_j r_j \text{ – Hamiltonian,}$$

$\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ – ceny obnoviteľných kapitálov
$\psi = (\psi_1,\dots,\psi_m)$ – ceny prírodných zdrojov

Hartwickovo pravidlo vo viac-dimenzionálnom prípade:

$$\mathbf{F} - \boldsymbol{f}_r\mathbf{r} = \left(\mathrm{F}^1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathrm{f}^1}{\partial \mathrm{r}_j} \mathrm{r}_j \,, \mathrm{F}^2 - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathrm{f}^2}{\partial \mathrm{r}_j} \mathrm{r}_j \,, \ldots, \mathrm{F}^n - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \mathrm{f}^n}{\partial \mathrm{r}_j} \mathrm{r}_j \right) = (0,0,\ldots,0)$$

Definícia. Riadiacu cestu $\varepsilon(t) = \big(r(t), c(t)\big)$ nazývame:

a) spravodlivou, ak $c_i = \text{constant}$, $i = 1, \ldots, n$, $c \neq 0$,

b) efektívnou, ak $\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial F^i(k,r,c)}{\partial k_p}\frac{\partial f^p}{\partial r_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^i}{\partial r_j}\right)\right] r_j = 0.$

Význam efektívnej cesty:

$\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial F^{i}(k,r,c)}{\partial k_p}\frac{\partial f^{p}}{\partial r_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^{i}}{\partial r_j}\right)\right]r_j=0$ – efektívna cesta

Ak $r_j \neq 0$, potom $\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial F^{i}(k,r,c)}{\partial k_p}\frac{\partial f^{p}}{\partial r_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^{i}}{\partial r_j}\right)=0$ – efektívne využitie j - teho prírodného zdroja v i - tom kapitálovom sektore.

Efektívna cesta zovšeobecňuje Hotellingovo pravidlo pre viac-dimenzionálnu ekonomiku.

Veta 1. *Ak riadiaca cesta* $\varepsilon(t) = \big(r(t), c(t)\big)$ *je taká, že Hartwickovo pravidlo* $\boldsymbol{F} - \boldsymbol{f}_r\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ *je splnené, tak vektor spotreby* $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_n)$ *je konštantný vtedy a len vtedy, keď táto cesta je efektívna.*

Poznámka: Veta rozširuje známy výsledok pre jeden kapitál a jeden prírodný zdroj na viac-dimenzionálny prípad.

Definícia. Hovoríme, že riadiaca cesta $\varepsilon(t) = \left(r(t), c(t)\right)$ je cenovou Hartwickovou cestou, ak spĺňa spolu s odpovedajúcimi veličinami $\left(k(t), s(t), \xi(t), \psi(t)\right)$ vzťah

$$\xi_1\left(F^1 - \mathrm{f}_\mathrm{r}^1\mathrm{r}\right) + \xi_2\left(F^2 - \mathrm{f}_\mathrm{r}^2\mathrm{r}\right) + \cdots + \xi_\mathrm{n}\left(F^n - \mathrm{f}_\mathrm{r}^\mathrm{n}\mathrm{r}\right) = 0.$$

Definícia. Riadiacu cestu $\varepsilon(t) = \big(r(t), c(t)\big)$ nazývame:

a) cenovo spravodlivou, ak $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \dot{c}_i = 0$,
b) cenovo efektívnou, ak

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \xi_i \left[\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial F^i}{\partial k_p} \frac{\partial f^p}{\partial r_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^i}{\partial r_j}\right) \right] r_j = 0.$$

Cenová spravodlivosť: Pokles v i-tej spotrebe je kompenzovaný zvýšením j-tej spotreby.

Cenová efektívnosť: Nižšia efektívnosť využívania prírodných zdrojov v i - tom kapitálovom sektore je kompenzovaná vyššou efektívnosťou ich využívania v j-tom kapitálovom sektore.

Veta 2. *Ak riadiaca cesta* $\varepsilon(t) = \left(r(t), c(t)\right)$ *je cenovou Hartwickovou cestou, tak je cenovo spravodlivá vtedy a len vtedy, ak je cenovo efektívna.*

Poznámka. Pojmy „cenová spravodlivosť“ a „cenová efektívnosť“ sú pravdepodobne nové v tejto oblasti.

Uvažujme funkciu užitočnosti $u\big(c(t)\big)$, ktorá vyjadruje mieru uspokojenia spotrebiteľa vzhľadom na spotrebu $c(t)$.

Efektívitu riadiacej cesty $\varepsilon(t) = \big(r(t), c(t)\big)$ vzhľadom na hodnotu $u\big(c(t)\big)$ meriame nevlastným integrálom

$$I = \int_0^\infty \pi(t) u\big(c(t)\big)\,\mathrm{d}t, \qquad \pi(t) - \text{ diskontný faktor.}$$

Hovoríme, že riadiaca cesta $\hat{\varepsilon}(t) = \big(\hat{r}(t), \hat{c}(t)\big)$ je optimálna, ak

$$\int_0^\infty \pi(t) u\big(\hat{c}(t)\big)\,\mathrm{d}t = \max_{\{r(t), c(t)\}} \int_0^\infty \pi(t) u\big(c(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Náš cieľ: Nájsť podmienky pre získanie optimálnej riadiacej cesty

$\hat{\varepsilon}(t) = \big(\hat{r}(t), \hat{c}(t)\big)$.

Rozšírenie systému (1) o integrál $\int_0^t \pi(\tau)u\big(c(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau$ je

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_0 = \pi(x_{n+1})U(c),\\
&\dot{k}_i = f^{i}(k,r) - \delta_i k_i - c_i \equiv F^{i}(k,r,c), \quad i = 1, \dots, n,\\
&\dot{s}_j = -r_j, \quad j = 1, \dots, m,\\
&\dot{x}_{n+1} = 1
\end{aligned}
$$

Kotangenciálne predĺženie tohto systému je

$$\dot{x}_0 = \pi(x_{n+1})U(c) = \frac{\partial H}{\partial \xi_0}, \qquad \dot{\xi}_0 = -\frac{\partial H}{\partial x_o},$$

$$\dot{k}_i = F^i(k,r,c) = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \qquad \dot{\xi}_i = -\frac{\partial H}{\partial k_i}, \qquad i = 1,\dots,n,$$

$$\dot{s}_j = -r_j = \frac{\partial H}{\partial \psi_j}, \qquad \dot{\psi}_j = -\frac{\partial H}{\partial s_j}, \qquad j = 1,\dots,m,$$

$$\dot{x}_{n+1} = \frac{\partial H}{\partial \xi_{n+1}}, \qquad \dot{\xi}_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}},$$

$$H(x_0,k,s,x_{n+1},\xi_0,\xi,\psi,\xi_{n+1}) = \xi_0\pi(x_{n+1})U(c) + \xi F - \psi r + \xi_{n+1}$$

Definícia. Riadiacu cestu $\varepsilon(t) = \big(r(t), c(t)\big)$ nazývame

a) Hartwickovou cestou, ak $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \dot{k}_i + \sum_{j=1}^{m} \psi_j \dot{s}_j$ je konštantné,

b) spravodlivou vzhľadom na užitočnosť, ak $u\big(c(t)\big)$ je konštantné,

c) neutrálnou, ak $H(x_0, k, s, x_{n+1}, \xi_0, \xi, \psi, \xi_{n+1}, r, c)$ je konštantné.

Veta 3. *Ak riadiaca cesta* $\varepsilon(t) = \big(r(t), c(t)\big)$ *má dve vlastnosti z nasledujúcich troch vlastností:*

a) je neutrálna,

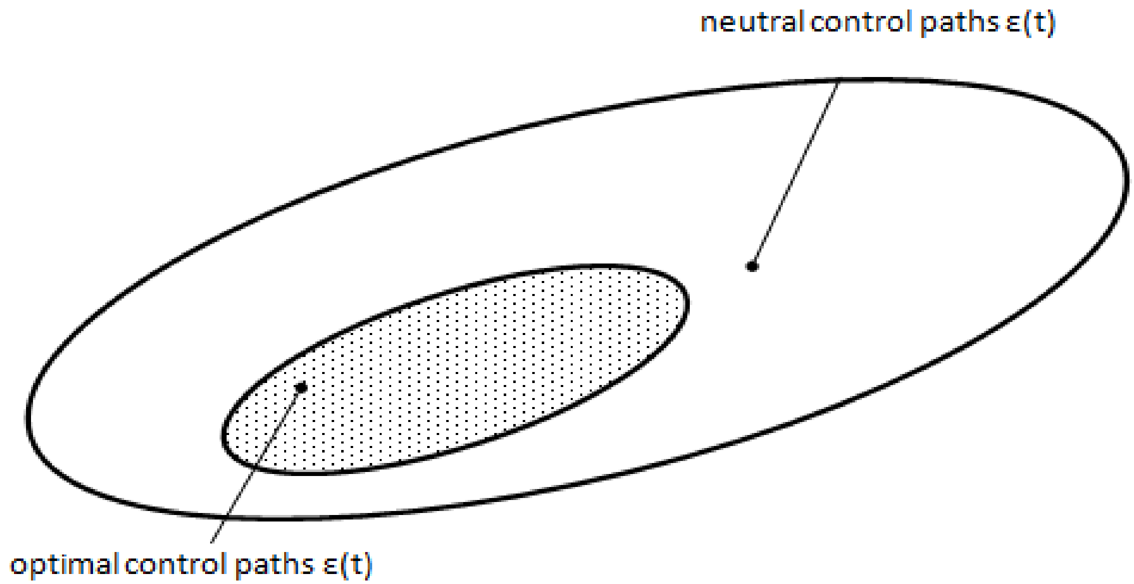
b) je spravodlivá vzhľadom na užitočnosť,

c) je Hartwickovou cestou,

tak má tiež zvyšnú tretiu vlastnosť.

Dôsledok 1. *Ak riadiaca cesta* $\varepsilon(t) = \big(r(t), c(t)\big)$ *je neutrálna a Hartwickova, tak je spravodlivá vzhľadom na užitočnosť.*

Lemma. *Optimálna riadiaca cesta* $\varepsilon(t) = \big(r(t), c(t)\big)$ *je neutrálna.*



Poznámka. Tvrdenie v dôsledku 1 zovšeobecňuje známy výsledok:

Ak riadiaca cesta $\varepsilon(t) = \big(r(t), c(t)\big)$ *je optimálna a Hartwickova, tak je spravodlivá vzhľadom na užitočnosť.*

Veta 3 obsahuje tiež konverzné tvrdenie:

Dôsledok 2. *Ak riadiaca cesta* $\varepsilon(t) = \big(r(t), c(t)\big)$ *je neutrálna a spravodlivá vzhľadom na užitočnosť, tak je Hartwickovou cestou.*

Poznámka. Dôsledok 2 zovšeobecňuje známy výsledok:
Ak riadiaca cesta $\varepsilon(t) = \big(r(t), c(t)\big)$ *je optimálna a spravodlivá vzhľadom na užitočnosť, tak je Hartwickovou cestou.*

Prezentované výsledky sa nachádzajú v nasledujúcich článkoch:

Dekrét, A.: On the Hartwick Rule in More-dimensional Case, AMSE 2009, Uherské Hradiště, Czech Republic.

Dekrét, A., Zimka, R.: On sustainability in Economy with Non-renewable Resources, AMSE 2010, Demänovská dolina, Slovakia.

Dekrét, A., Zimka, R.: On Intergeneration Equity in Economy with Non-renewable resources, AMSE 2011, Ladek Zdroj, Poland.

Dekrét, A., Zimka, R.: On Intergeneration Equity and the Hartwick Rule in a More Dimensional Exhaustible Resource Model, AMSE 2012, Liberec, Czech Republic.

4 Záver

Problematika ekonomickej udržateľnosti, zvyšovania životej úrovne spoločnosti a medzigeneračnej spravodlivosti je naďalej intenzívne študovaná. Skúmajú sa rôzne typy produkčných funkcií, berie sa do úvahy technický pokrok a zmeny vo vývoji populácie.

Vidíme, že v teoretickej rovine vieme, ako by sme mali narábať so vzácnym nerastným bohatstvom, aby jeho využívanie nebolo na úkor našich detí a ďalších generácií. Ale realita je celkom iná. Väčšina ľudí chce dostávať oveľa viac, ako potrebuje pre svoj slušný a dôstojný život. V tejto snahe im nie je nič sväté. Vidíme to každý deň okolo nás. K obrovskému plytvaniu vzácnymi surovinami dochádza najmä chamtivosťou veľkých nadnárodných spoločností ovládajúcich naftársky, zbrojársky, chemický, farmaceutický priemysel. A vlády štátov nie sú schopné toto plytvanie obmedzovať, lebo sú s týmito spoločnosťami úzko prepojené. Ľudstvo svojou činnosťou, nerešpektovaním morálnych a etických hodnôt smeruje postupne k svojej záhube.