Pravidelnosti a symetrie pri konštrukciách magických štvorcov a kociek

Ingrid Semanišinová

Ústav matematických vied
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Prírodovedecká fakulta

e-mail: ingrid.semanisinova@upjs.sk

Pravidelnosti a symetrie pri konštrukciách magických štvorcov a kociek

- Poznámky z histórie magických štvorcov
- O konštrukciách magických štvorcov
- Magické štvorce a kocky so žiakmi

Definícia

Magický štvorec rádu *n* je štvorcová tabuľka obsahujúca všetky čísla od 1 po n^2 tak, že súčet čísel v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je rovnaký.

Súčet čísel v riadku (a teda aj v stĺpci a na oboch diagonálach) sa nazýva **magické číslo**.

Definícia

Magický štvorec rádu *n* je štvorcová tabuľka obsahujúca všetky čísla od 1 po n^2 tak, že súčet čísel v každom riadku, stĺpci a na oboch diagonálach je rovnaký.

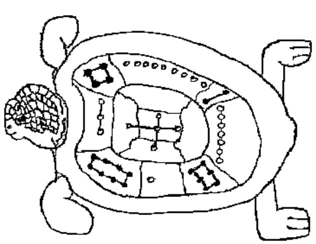
Súčet čísel v riadku (a teda aj v stĺpci a na oboch diagonálach) sa nazýva **magické číslo**.

Magické číslo magického štvorca rádu n:

$$(1+2+3+\ldots+n^2)/n=\frac{n\left(n^2+1\right)}{2}$$

Z histórie

- Pred cca 4000 rokmi – Čínska legenda – magický štvorec Lo-Shu
- 9. storočie – Islamský svet, 13. storočie – nové metódy konštrukcie
- 13. storočie – India – Narayana Pandita v diele Ganita Kaumudi – metódy konštrukcie magických štvorcov
- 14. storočie - Európa



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Lo-Shu

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Pandiagonálny magický štvorec objavený v Indii

V roku 1514 vytvoril ***Albrecht Dűrer*** známy drevoryt "**Melencolia I**", na ktorom nájdeme magický štvorec rádu 4 na stene za zamysleným géniom.

Ľudia verili, že tento magický štvorec patriaci Jupiteru, znižoval vplyv tejto planéty a tak pomáhal pri liečbe depresie.

V roku 1514 vytvoril ***Albrecht Dűrer*** známy drevoryt "**Melencolia I**", na ktorom nájdeme magický štvorec rádu 4 na stene za zamysleným géniom.

Ľudia verili, že tento magický štvorec patriaci Jupiteru, znižoval vplyv tejto planéty a tak pomáhal pri liečbe depresie.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

V roku 1514 vytvoril ***Albrecht Dűrer*** známy drevoryt "**Melencolia I**", na ktorom nájdeme magický štvorec rádu 4 na stene za zamysleným géniom.

Ľudia verili, že tento magický štvorec patriaci Jupiteru, znižoval vplyv tejto planéty a tak pomáhal pri liečbe depresie.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

V roku 1514 vytvoril ***Albrecht Dűrer*** známy drevoryt "**Melencolia I**", na ktorom nájdeme magický štvorec rádu 4 na stene za zamysleným géniom.

Ľudia verili, že tento magický štvorec patriaci Jupiteru, znižoval vplyv tejto planéty a tak pomáhal pri liečbe depresie.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Nemecký filozof a teológ ***Cornelius Agrippa*** (1486-1535), jeden z najvýznamnejších predstaviteľov renesančnej mystiky, venoval magickým štvorcom knihu *Okultistická filozofia (1531).*

V tejto knihe spojil Slnko, Mesiac a 5 vtedy známych planét: Merkúr, Venuša, Mars, Jupiter, Saturn so siedmimi magickými štvorcami rádu 3, 4, … , 9. Popísal tu tiež z akého materiálu majú byť magické štvorce zhotovené, za akej konštelácie hviezd a aké sú ich priaznivé aj nepriaznivé účinky.

Rád, planéta, materiál	Priaznivé účinky	Nepriaznivé účinky
3, Saturn, olovo	Pomáha pri pôrode, pomáha ovplyvňovať mocných.	Škodí stavbám, sadom, rozháňa vojská.
4, Jupiter, striebro	Zisk, bohatstvo, láska, mier svornosť.	Ak bol vyrobený za nepriaznivého postavenia hviezd má opačné účinky.
5, Mars, železo, meď	Úspech v boji (zhotovený zo železa).	Hádky medzi ľuďmi, nešťastie v love a v boji, mocné zbavuje úradu (zhotovený z medi).
6, Slnko, zlato	Sláva, úspech, moc.	Urobí zo svojho majiteľa tyrana, ktorý zle skončí.
7, Venuša, striebro	Zaháňa neplodnosť, pre mužov láska ženy a mužná sila, veselosť.	Ak bol vyrobený za nepriaznivého postavenia hviezd má opačné účinky.
8, Merkúr, striebro, cín	Úspech vo vede, dobrá pamäť, zisk.	Ak bol vyrobený za nepriaznivého postavenia hviezd má opačné účinky.
9, Mesiac, striebro, olovo	Úspech, upevňuje zdravie (zhotovený zo striebra).	Zhotovený z olova a zakopaný do zeme škodí tým ktorý žijú v okolí.

Magický štvorec rádu 8 zhotovený za priaznivého postavenia Merkúru, vyrytý do striebra, cínu, mosadze alebo napísaný na panenskom pergamene, prináša jeho majiteľovi **bystrý um, schopnosť poznávať skryté veci, posilňuje pamäť**.

(Cornelius Agrippa, *Okultistická filozofia* (1531))

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	45
32	34	38	29	25	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	45	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Magický štvorec rádu 8 zhotovený za priaznivého postavenia Merkúru, vyrytý do striebra, cínu, mosadze alebo napísaný na panenskom pergamene, prináša jeho majiteľovi **bystrý um, schopnosť poznávať skryté veci, posilňuje pamäť**.

(Cornelius Agrippa, *Okultistická filozofia* (1531))

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	45
32	34	38	29	25	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	45	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

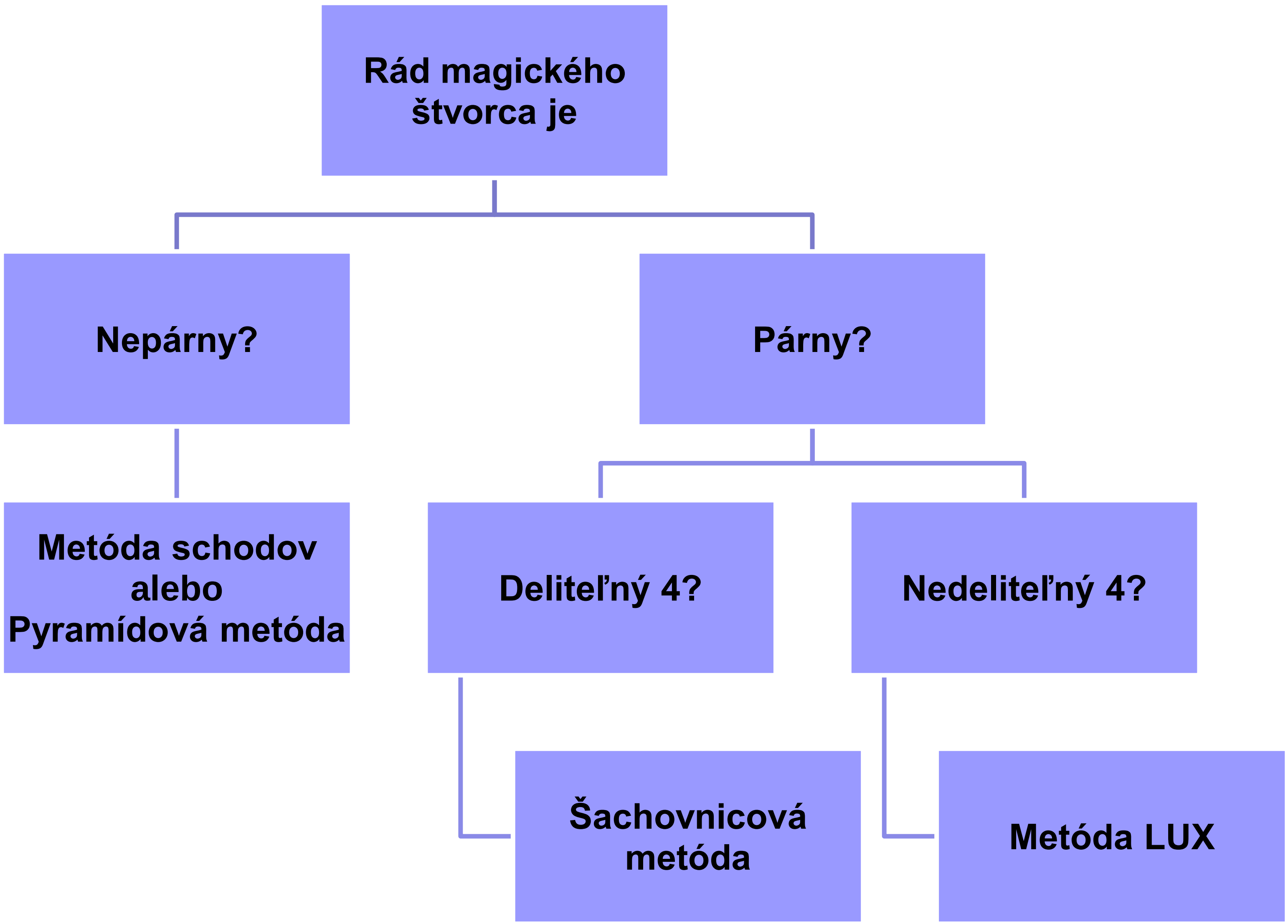
V **Goetheho Faustovi** je výjav, keď čarodejnica pripravuje omladzujúce bylinky.

Jedničku vem,
v deset ji změň,
dvojku dej ven,
s trojkou se těš,
to zbohatneš.
Čtverku, tu pryč!
Pět jako šest,
malá to čest,
sedmička spíš,
osmu tam piš;
devět je víc,
deset je nic.
Toť násobilka kouzelnic.

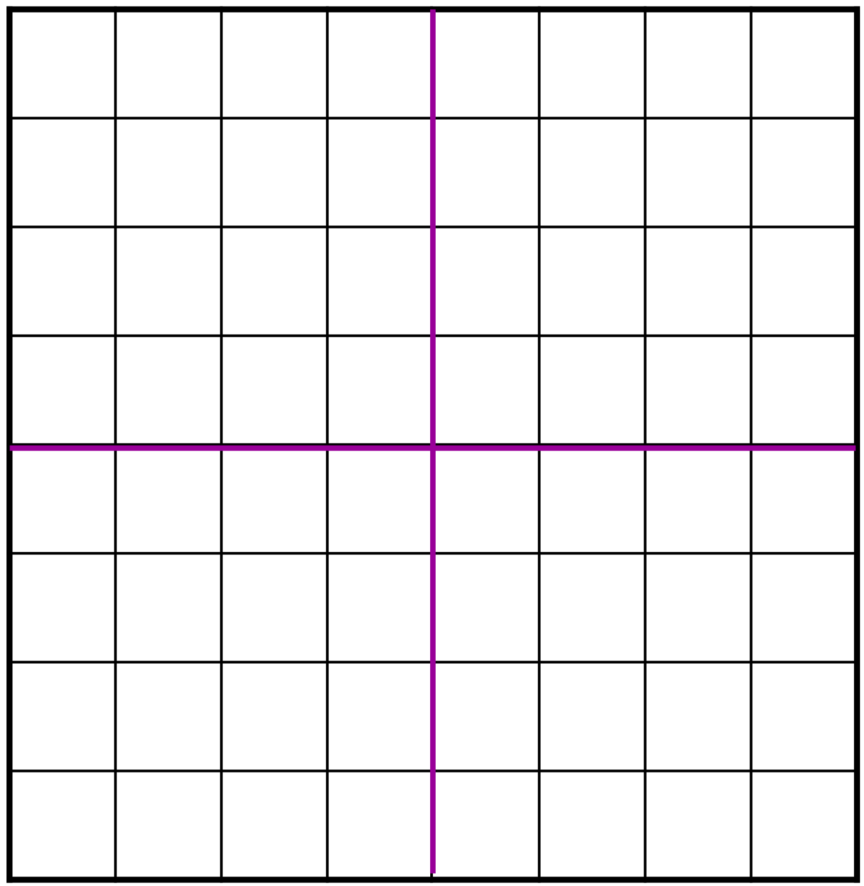
10	2	3
0	7	8
5	6	4

Aus Eins mach’ Zehn,
Und Zwey laß gehn,
Und Drey mach’ gleich,
So bist du reich.
Verlier’ die Vier!
Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex’,
Mach’ Sieben und Acht,
So ist’s vollbracht:
Und Neun ist Eins,
Und Zehn ist keins.
Das ist das Hexen-Einmal-Eins!

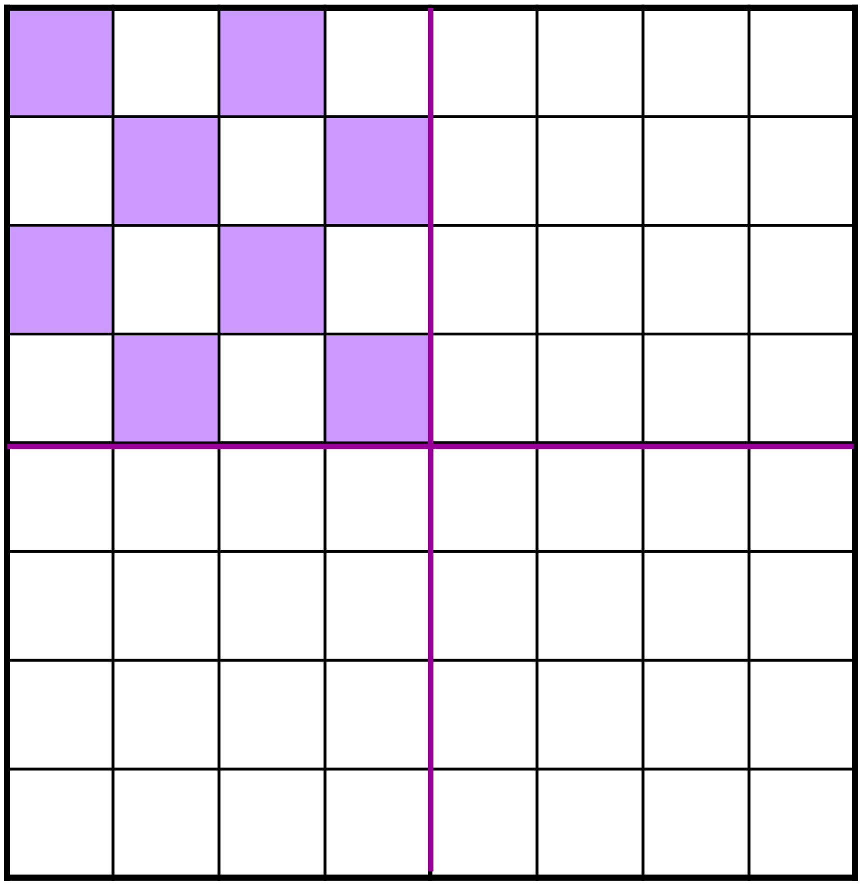
Metódy konštrukcie magických štvorcov



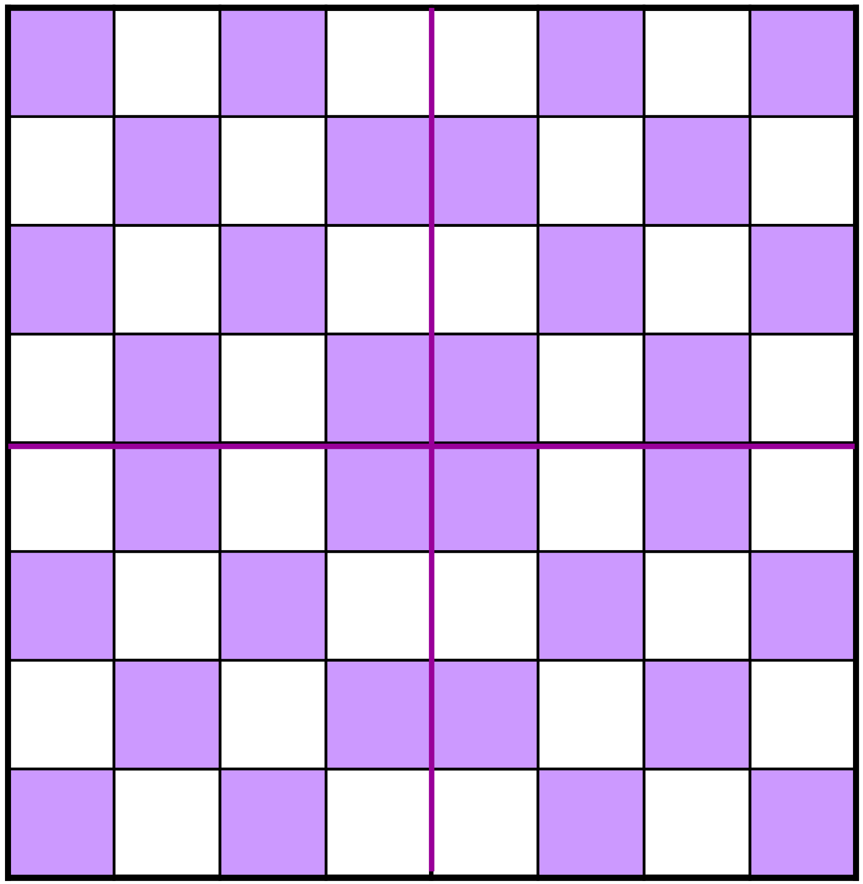
Šachovnicová metóda – algoritmus na konštrukciu magických štvorcov rádu 4*k*



Šachovnicová metóda – algoritmus na konštrukciu magických štvorcov rádu 4*k*



Šachovnicová metóda – algoritmus na konštrukciu magických štvorcov rádu 4*k*



Šachovnicová metóda – algoritmus na konštrukciu magických štvorcov rádu 4*k*

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Šachovnicová metóda – algoritmus na konštrukciu magických štvorcov rádu 4*k*

64	2	62	4	5	59	7	57
9	50	11	53	52	14	50	16
48	18	46	20	21	43	23	41
25	39	27	37	36	30	34	32
33	31	35	29	28	38	26	40
24	42	22	44	45	19	47	17
49	15	51	13	12	54	10	56
8	58	6	60	61	3	63	1

Šachovnicová metóda - prečo to funguje?

Do **tabuľky s rozmermi 8 x 8** napíšte vzostupne **čísla od 1 do 64** tak, že začnete od ľavého horného rohu a postupne budete zľava doprava vypĺňať ostatné riadky. Skúmajte súčty v riadkoch, stĺpcoch a na diagonálach.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Šachovnicová metóda - prečo to funguje?

1	2	3	4	5	6	7	8	36
9	10	11	12	13	14	15	16	100
17	18	19	20	21	22	23	24	164
25	26	27	28	29	30	31	32	228
33	34	35	36	37	38	39	40	292
41	42	43	44	45	46	47	48	356
49	50	51	52	53	54	55	56	420
57	58	59	60	61	62	63	64	484
232	240	248	256	264	272	280	288	

8	2	3	4	5	6	7	1	36
16	15	11	12	13	14	10	9	100
24	23	22	20	21	19	18	17	164
32	31	30	29	28	27	26	25	228
33	39	38	37	36	35	34	40	292
41	42	46	45	44	43	47	48	356
49	50	51	53	52	54	55	56	420
57	58	59	60	61	62	63	64	484
260	260	260	260	260	260	260	260	

S_i – súčet čísel v i-tom stĺpci

S_{n-i+1} – súčet čísel v (n-i+1) - tom stĺpci, t.j. v stĺpci súmernom s i-tym stĺpcom podľa vertikálnej osi tabuľky.

Rozdiel medzi súčtami je $n(n-2i+1)$. Výmenou $n/2$ zodpovedajúcich si čísel súčty vyrovnáme (pre párne n) .

Šachovnicová metóda - prečo to funguje?

Magický štvorec rádu 4

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

→

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Šachovnicová metóda - prečo to funguje?

Magický štvorec rádu 4

	4	2	3	1	10
	5	6	7	8	26
	9	10	11	12	42
	16	14	15	13	58
34	34	32	36	34	34

Výmena v 1. a 4. stĺpci

	16	2	3	13	34
	5	6	7	8	26
	9	10	11	12	42
	4	14	15	1	34
34	34	32	36	34	34

Výmena v 1. a 4. riadku

	4	2	3	1	10
	5	7	6	8	26
	9	11	10	12	42
	16	14	15	13	58
34	34	34	34	34	34

Výmena v 2. a 3. stĺpci

	16	2	3	13	34
	5	11	10	8	34
	9	7	6	12	34
	4	14	15	1	34
34	34	34	34	34	34

Výmena v 2. a 3. riadku

Magický štvorec rádu 8 zostrojený výmenami na diagonálach

	1	2	3	4	5	6	7	8	36
	9	10	11	12	13	14	15	16	100
	17	18	19	20	21	22	23	24	164
	25	26	27	28	29	30	31	32	228
	33	34	35	36	37	38	39	40	292
	41	42	43	44	45	46	47	48	356
	49	50	51	52	53	54	55	56	420
	57	58	59	60	61	62	63	64	484
260	232	240	248	256	264	272	280	288	260

	64	63	3	4	5	6	58	57	260
	56	55	11	12	13	14	50	49	260
	17	18	46	45	44	43	23	24	260
	25	26	38	37	36	35	31	32	260
	33	34	30	29	28	27	39	40	260
	41	42	22	21	20	19	47	48	260
	16	15	51	52	53	54	10	9	260
	8	7	59	60	61	62	2	1	260
260	260	260	260	260	260	260	260	260	260

Čo sme zistili?

Ak do tabuľky vpíšeme vzostupne čísla od 1 do n^2 tak, že začneme od ľavého horného rohu a postupne budeme zľava doprava vypĺňať ostatné riadky tak:

- **Súčet čísel na diagonále je magické číslo**.
- V magickom štvorci rádu 2*k* potrebujeme v riadkoch (stĺpcoch) urobiť ***k* výmen medzi riadkami (stĺpcami)** symetrickými podľa horizontálnej (vertikálnej) osi tabuľky, **aby sa vyrovnali súčty**.
- **Výmena čísel súmerných podľa stredu tabuľky** nahrádza **1 výmenu v príslušnom riadku a 1 výmenu v príslušnom stĺpci**.

Magický štvorec rádu 6

	1	2	3	4	5	6	21
	7	8	9	10	11	12	57
	13	14	15	16	17	18	93
	19	20	21	22	23	24	129
	25	26	27	28	29	30	165
	31	32	33	34	35	36	201
111	96	102	108	114	120	126	111

Pôvodná tabuľka

	36	32	3	4	5	31	111
	12	8	9	10	11	7	57
	13	14	15	16	17	18	93
	19	20	21	22	23	24	129
	25	26	27	28	29	30	165
	6	2	33	34	35	1	111
111	111	102	108	114	120	111	111

Vyrovnanie súčtov v 1. a 6. riadku a stĺpci

	36	32	3	4	5	31	111
	12	29	27	10	26	7	111
	13	17	15	16	14	18	93
	19	20	21	22	23	24	129
	25	11	9	28	8	30	111
	6	2	33	34	35	1	111
111	111	111	108	114	111	111	111

Vyrovnanie súčtov v 2. a 5. riadku a stĺpci

	36	32	3	4	5	31	111
	12	29	27	10	26	7	111
	19	17	22	21	14	18	111
	13	20	16	15	23	24	111
	25	11	9	28	8	30	111
	6	2	34	33	35	1	111
111	111	111	111	111	111	111	111

Vyrovnanie súčtov v 3. a 4. riadku a stĺpci

Magický štvorec rádu 8 inak

	64	63	6	4	5	3	58	57	260
	56	55	14	12	13	11	50	49	260
	41	42	46	20	21	43	23	24	260
	25	26	27	37	36	30	39	40	260
	33	34	35	29	28	38	31	32	260
	17	18	22	44	45	19	47	48	260
	16	15	51	53	52	54	10	9	260
	8	7	59	61	60	62	2	1	260
260	260	260	260	260	260	260	260	260	260

		výmena na diagonálach
		výmena v stĺpcoch
		výmena v riadkoch

Magický štvorec rádu 8 zostrojený výmenami po diagonálach aj výmenami v riadkoch a stĺpcoch

Magický štvorec rádu 10

	100	92	3	97	5	6	94	8	9	91	505
	81	89	13	14	86	85	17	18	82	20	505
	80	72	78	24	25	26	27	73	29	71	505
	31	39	68	67	35	66	64	63	32	40	505
	41	59	48	44	56	55	57	43	52	50	505
	60	49	53	54	46	45	47	58	42	51	505
	61	62	38	37	65	36	34	33	69	70	505
	30	22	28	77	75	76	74	23	79	21	505
	11	19	83	84	16	15	87	88	12	90	505
	10	2	93	7	96	95	4	98	99	1	505
505	505	505	505	505	505	505	505	505	505	505	505

Magický štvorec Albrechta Dűrera

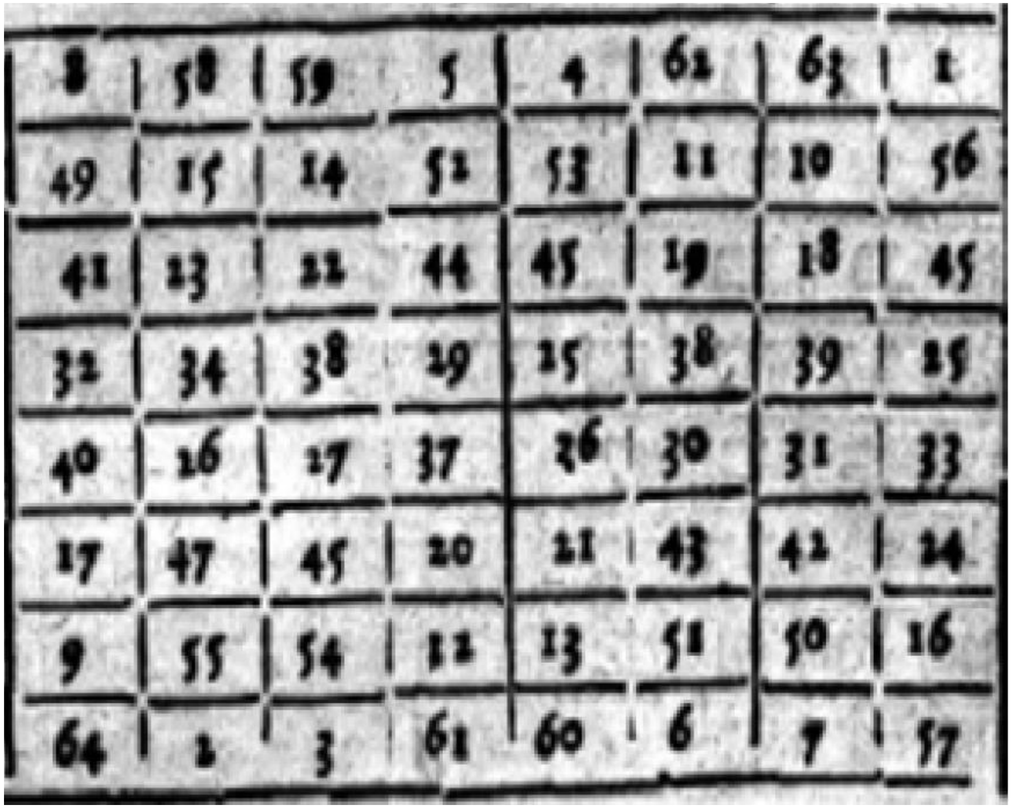
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Magický štvorec rádu 8

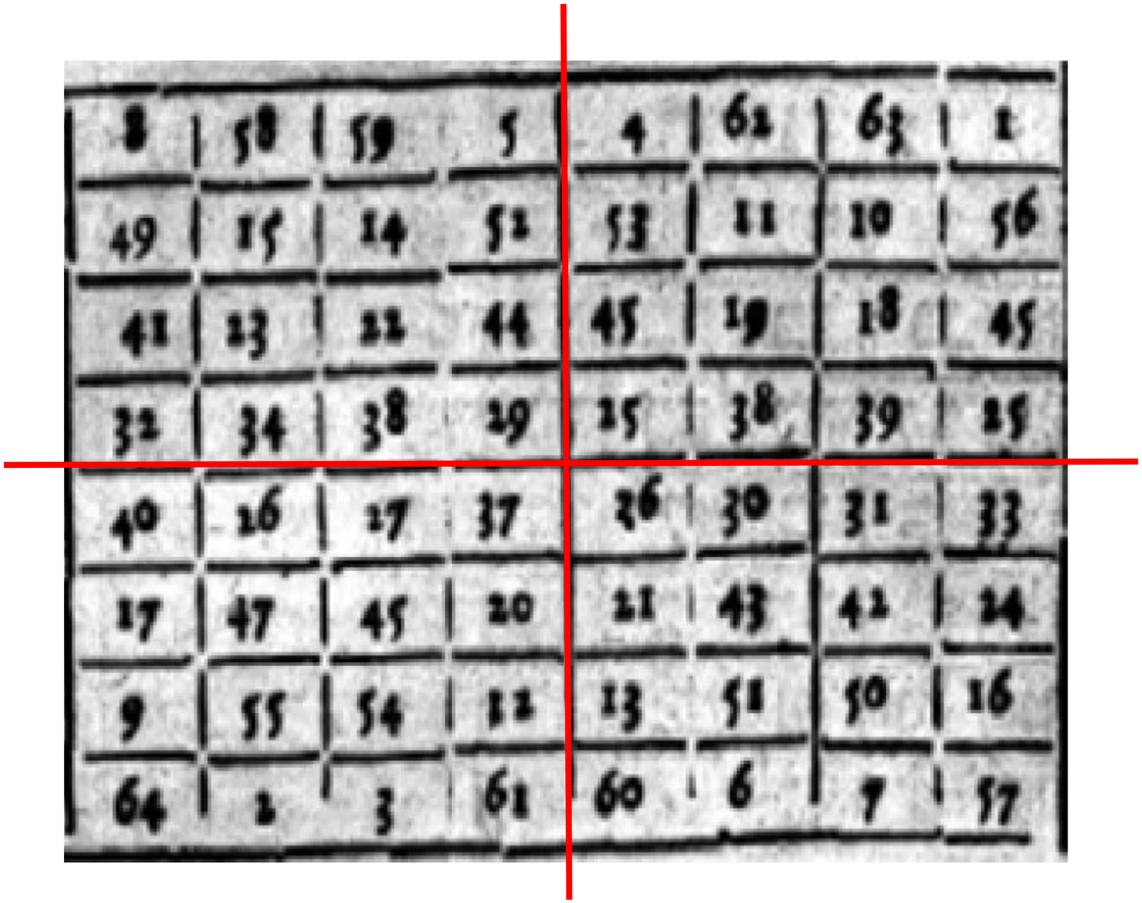
Cornelius Agrippa, *Okultistická filozofia* (1531)



8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	45
32	34	38	29	25	38	39	25
40	26	27	37	26	30	31	33
17	47	45	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Magický štvorec rádu 8

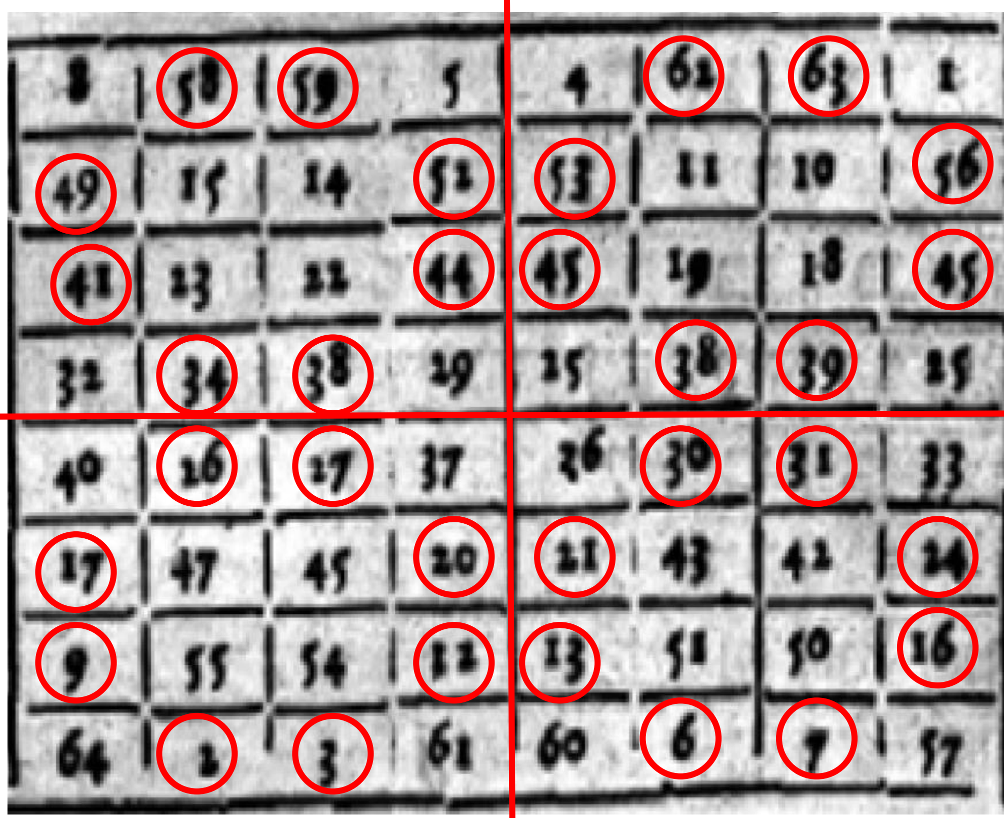
Cornelius Agrippa, *Okultistická filozofia* (1531)



8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	45
32	34	38	29	25	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	45	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

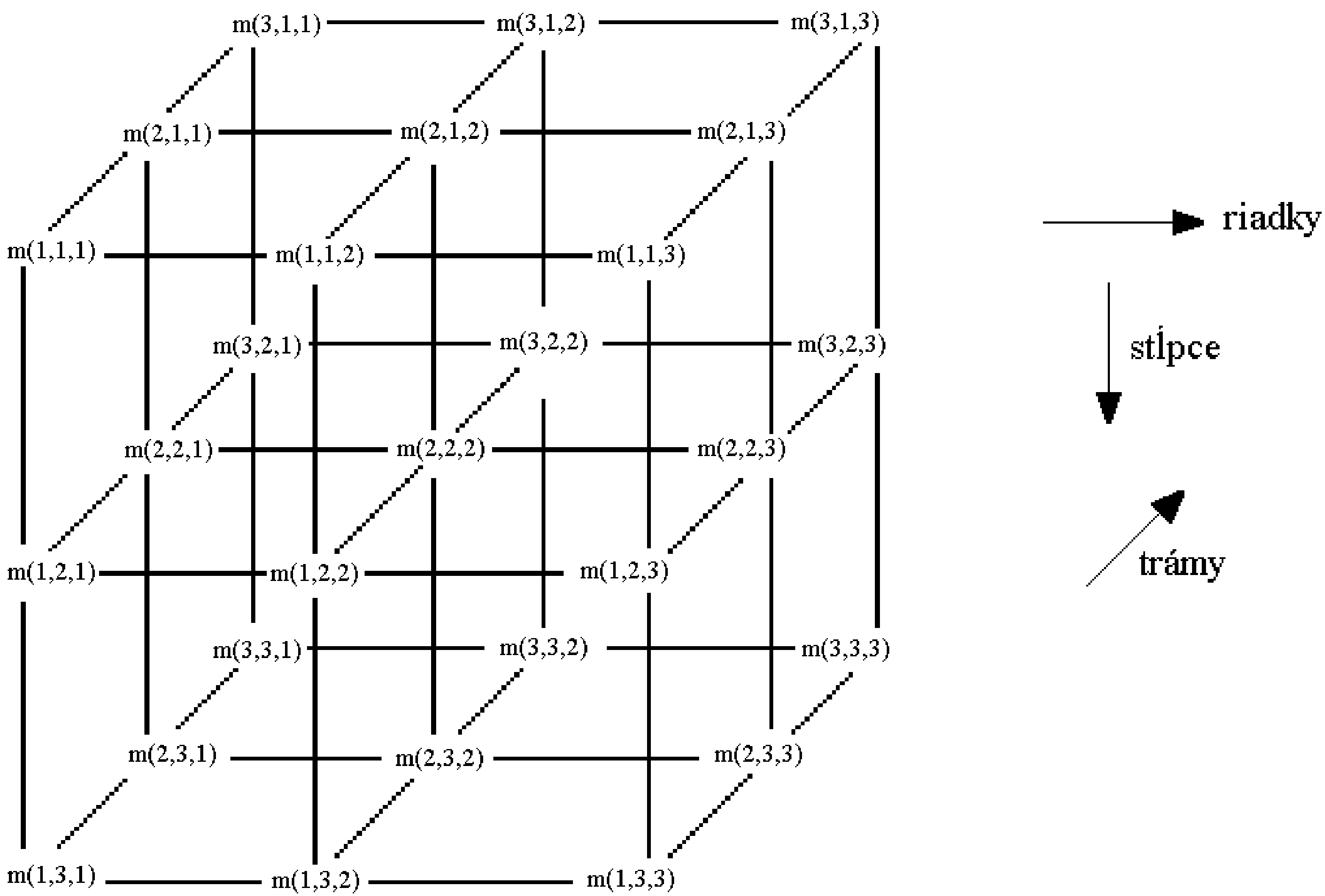
Magický štvorec rádu 8

Cornelius Agrippa, *Okultistická filozofia* (1531)



8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	45
32	34	38	29	25	38	39	25
40	26	27	37	26	30	31	33
17	47	45	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Dá sa analogický algoritmus použiť pri konštrukcii magickej kocky?



Dá sa analogický algoritmus použiť pri konštrukcii magickej kocky?

- Tabuľka 8 x 8 x 8 – čísla od 1 do 64 vpíšeme postupne zľava doprava, zhora dole a spredu dozadu.
- Magická kocka rádu 8.
- Tabuľka 10 x 10 x 10 – algoritmus nevieme modifikovať tak, aby sme zostrojili magickú kocku rádu 10.

Iný pohľad

Latinské štvorce

Definícia. Latinský štvorec rádu *n* je štvorcová tabuľka obsahujúca prirodzené čísla 0, 1, 2, ... , *n* – 1, pričom každý riadok a každý stĺpec obsahuje každé číslo práve raz.

0	1	2	3
2	3	0	1
3	2	1	0
1	0	3	2

Latinský štvorec rádu 4

8		5			6	4		2
		4						
		9	8	1			6	7
	3							
7			3		9			1
							5	
1	9			4	5	2		
						3		
2		8	7			9		5

Sudoku

Ortogonálne latinské štvorce

Hovoríme, že dva latinské štvorce sú **ortogonálne**, ak každé dve usporiadané dvojice, vytvorené z prislúcha-júcich si políčok sú rôzne.

0	1	2
2	0	1
1	2	0

01	12	20
22	00	11
10	21	02

1	2	0
2	0	1
0	1	2

Ortogonálne latinské štvorce

Ortogonálne latinské štvorce sú známe aj ako Eulerovské štvorce.

Euler predpokladal, že neexistujú ortogonálne latinské štvorce rádu $n = 4k + 2$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$. V roku 1959 bolo dokázané, že pre $k > 1$, $k \neq 2$ a $k \neq 6$ takéto štvorce existujú.

Eulerov problém s 36 dôstojníkmi (1779)

Na vojenskú slávnosť má nastúpiť 36 dôstojníkov povyberaných zo šiestich plukov a to tak, aby z každého pluku bol vybraný plukovník, podplukovník, major, nadporučík, poručík a podporučík. Dôstojníci mali pri nástupe utvoriť štvorec zložený zo šiestich radov po šiestich dôstojníkoch a to tak, aby v každom rade a zástupe bol jeden dôstojník z každého pluku i z každej hodnosti. Nakreslite ako vyzeral štvorec, ktorý vytvorili pri nástupe.

Niekoľko úloh

Všimnite si, čo sa stane ak:

- ku každému číslu latinského štvorca pripočítame rovnaké číslo,
- každé číslo latinského štvorca vynásobime rovnakým číslom,
- sčítame dva rôzne latinské štvorce toho istého rádu (sčítame čísla v zodpovedajúcich si políčkach),
- kombinujeme vyššie uvedené operácie.

0	1	2	3
2	3	0	1
3	2	1	0
1	0	3	2

0	3	1	2
2	1	3	0
3	0	2	1
1	2	0	3

Konštrukcia magického štvorca z ortogonálnych latinských štvorcov

Metódu konštrukcie magických štvorcov z ortogonálnych latinských štvorcov použil **Philippe de La Hire** (1642 - 1718).

$$4 \odot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline \end{array} \oplus 1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 8 & 10 & 15 \\ \hline 11 & 14 & 4 & 5 \\ \hline 16 & 9 & 7 & 2 \\ \hline 6 & 3 & 13 & 12 \\ \hline \end{array}$$

Všeobecne:
Ak L_1 a L_2 sú ortogonálne latinské štvorce rovnakého rádu, ktoré majú aj súčty na svojich diagonálach rovné $n(n-1)/2$, tak operáciou $n \odot L_1 \oplus L_2 \oplus 1$ dostaneme **magický štvorec**.

Konštrukcia magickej kocky z ortogonálnych latinských kociek

Latinská kocka L_1

1. vrstva

0	1	2
2	0	1
1	2	0

2. vrstva

1	2	0
0	1	2
2	0	1

3. vrstva

2	0	1
1	2	0
0	1	2

Konštrukcia magickej kocky z ortogonálnych latinských kociek

3 latinské kocky na sebe L_1, L_2, L_3

1. vrstva

0,2,1	1,1,2	2,0,0
2,1,2	0,0,0	1,2,1
1,0,0	2,2,1	0,1,2

2. vrstva

1,0,2	2,2,0	0,1,1
0,2,0	1,1,1	2,0,2
2,1,1	0,0,2	1,2,0

3. vrstva

2,1,0	0,0,1	1,2,2
1,0,1	2,2,2	0,1,0
0,2,2	1,1,0	2,0,1

Magická kocka

$$M = L_1 \odot n^2 \oplus L_2 \odot n \oplus L_3$$

∈

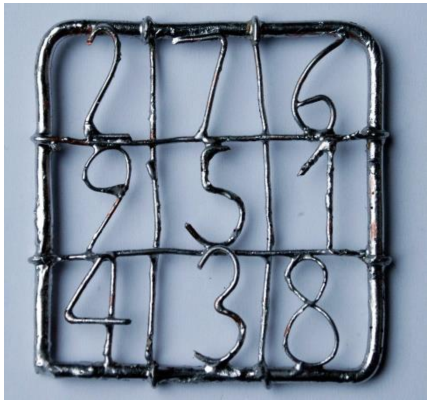
Veta. (Trenkler, 2000)

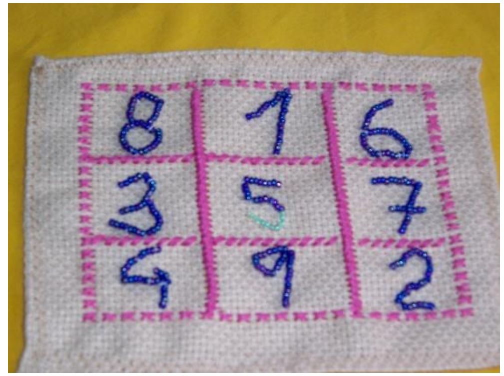
P-rozmerná magická kocka rádu n existuje pre každé $n \in N$, $n \neq 2$.

Magické štvorce a kocky so žiakmi

Žiaci 1.- 6. ročník ZŠ

- Motivačné prostredie na nácvik aritmetických operácií, práce s tabuľkami
- Rozvoj algoritmického myslenia (sémantické porozumenie algoritmu)
- Rozvoj kombinatorického myslenia (systematické prehľadávanie možností pri dopĺňaní čísel do neúplneho magického, resp. latinského štvorca)
- Symetrie v inom kontexte
- Rozvoj schopnosti argumentovať (dôkaz neexistencie magického štvorca rádu 2, výpočet magického čísla pre magické štvorce konkrétnych rádov)

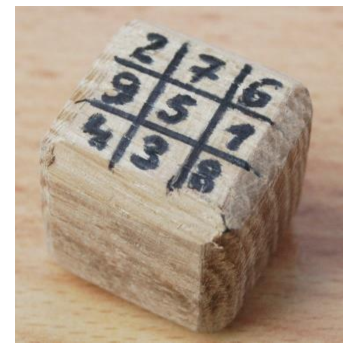

2 7 6
9 5 1
4 3 8


8 1 6
3 5 7
4 9 2


8 1 6
3 5 7
4 9 2

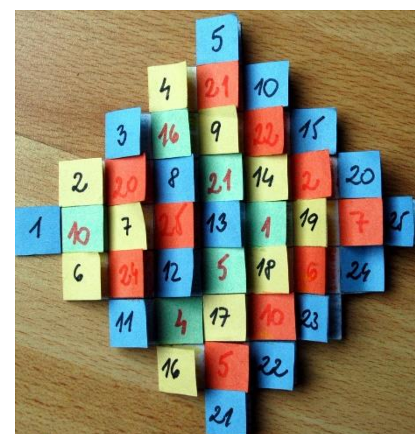

4 9 2
3 5 7
8 1 6


6 7 2
1 5 9
8 3 4


2 7 6
9 5 1
4 3 8


4 9 2
3 5 7
8 1 6


5 46 15 56 25 66 35 76 45
54 14 55 24 65 34 75 44 4
13 63 23 64 33 74 43 3 53
62 22 72 32 73 42 2 52 12
21 71 31 81 41 1 51 11 61
70 30 80 40 9 50 10 60 20
29 79 39 8 49 18 59 19 69
78 38 7 48 17 58 27 68 28
37 6 47 16 57 26 67 36 77



Magické štvorce a kocky so žiakmi

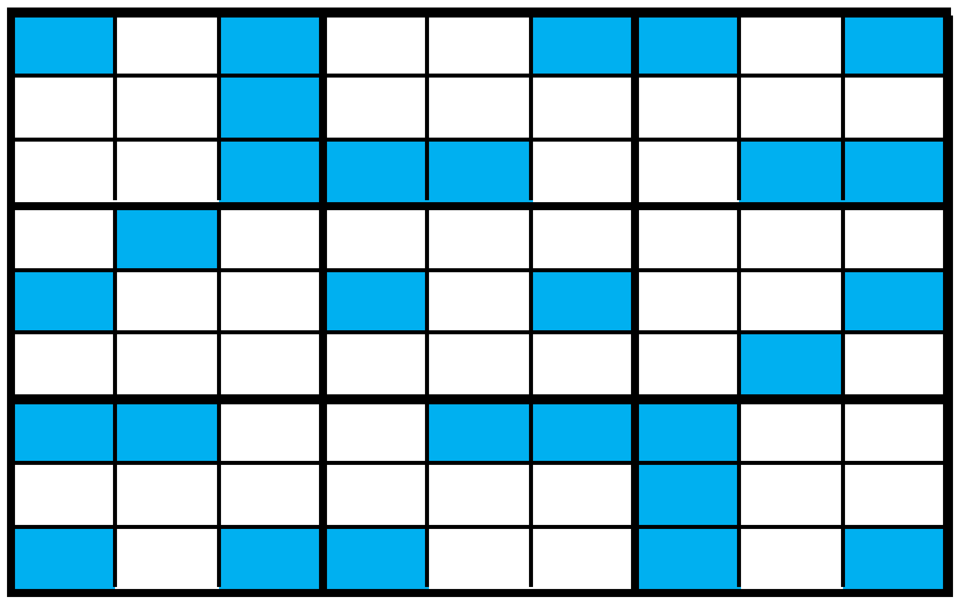
Žiaci 7.-9. ročník ZŠ, žiaci SŠ

- Rozvoj algoritmického myslenia (kalkulatívne porozumenie algoritmu)
- Symetrie v novom kontexte (v rovine aj v priestore)
- Rozvoj schopnosti reprezentácie
- Propedeutika matíc

Sudoku

8		5			6	4		2
		4						
		9	8	1			6	7
	3							
7			3		9			1
							5	
1	9			4	5	2		
						3		
2		8	7			9		5

Sudoku



Ďakujem za pozornosť