Asymptotika riešení nelineárnej rovnice vedenia tepla

Pavol Quittner

Banská Bystrica, 29. októbra 2013

Nelineárna rovnica vedenia tepla je jednou z mnohých nelineárnych parabolických rovníc a systémov, ktoré modelujú dôležité javy v reálnom svete ale aj v matematike.

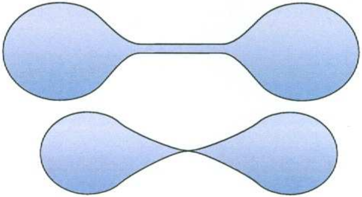
Asymptotika: Riešenia takýchto úloh môžu existovať **globálne**

– ohraničenosť, konvergencia k stacionárnemu riešeniu a jej rýchlosť, špeciálne rýchlosť poklesu k nulovému riešeniu, ...

alebo môžu vyvinúť singularitu v konečnom čase: **blow-up** (explózia)

– rýchlosť explózie, profil riešenia v čase explózie, možnosť jeho pokračovania, ...

Singularity v reálnom svete a matematike



Nelineárna rovnica vedenia tepla

$$u_t = \Delta u + u^p, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0 \tag{1}$$

$$u = u(x,t) \geq 0, \quad x = (x_1, \dots, x_N), \qquad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$u_t = \Delta u$ ... lineárna rovnica vedenia tepla (difúzia)

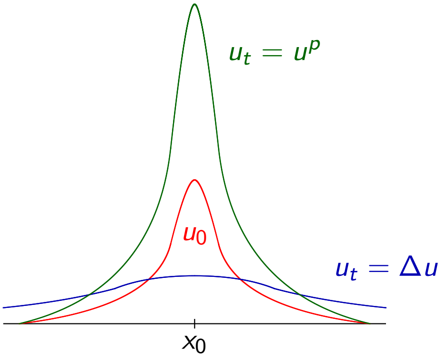
u^p ... reakčný člen (exotermická reakcia)

$p > 1$ ... superlineárna nelinearita

Difúzia vs. reakcia

$$u_t = \Delta u + u^p, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N \tag{2}$$



Dobrý model

$$u_t = \Delta u + u^p, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0 \tag{1}$$

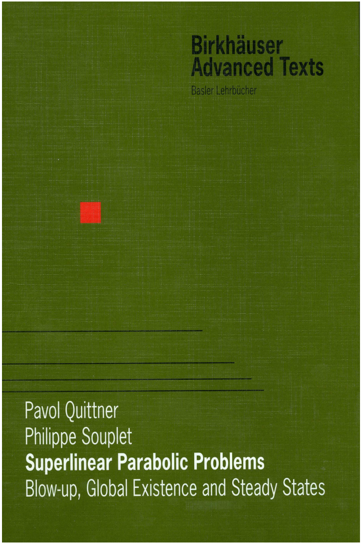
(1) je dobrá modelová úloha:

- vyzerá **jednoducho** (umožňuje relatívne ľahké pochopenie metód, ktoré sa dajú použiť aj pre komplikovanejšie úlohy)
- má veľmi **bohatú matematickú štruktúru**; jej štúdium si vyžaduje veľa nových nápadov a prináša stále nové prekvapenia

Kritické exponenty (pri ktorých sa mení správanie sa riešení):

$$1+\frac{2}{N},\quad 1+\frac{2}{N-2},\quad 1+\frac{4}{N-4+2\sqrt{N-1}},$$
$$1+\frac{4}{N-2},\quad 1+4\frac{N-4+2\sqrt{N-1}}{(N-2)(N-10)},\quad 1+\frac{6}{N-10},\quad \dots$$

Metódy skúmania



P. Quittner, Ph. Souplet:
Superlinear Parabolic Problems,
Birkhäuser 2007 (584 strán):

Výsledky a metódy ich získania
(nielen) pre modelovú rovnicu (1)

Od r. 2007 boli niektoré
otvorené problémy vyriešené,
viaceré zostali a pribudli nové . . .

Základné nástroje pre skúmanie

Formulka variácie konštánt

Energia (variačná štruktúra)

Škálovanie

Princíp maxima

Formulka variácie konštánt

$$y_t = ay + y^p, \quad y(0) = y_0: \qquad y(t) = e^{at}y_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}y^p(s)\,ds$$

$$u_t = \Delta u + u^p, \quad u(\cdot,0) = u_0: \qquad u(\cdot,t) = e^{\Delta t}u_0 + \int_0^t e^{\Delta(t-s)}u^p(\cdot,s)\,ds,$$

$$(e^{\Delta t}v)(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{|x-y|^2/4t}v(y)\,dy$$

Umožňuje: dokázať lokálnu existenciu a jednoznačnosť pre u_0 vo vhodných priestoroch funkcií (napr. $L^q(\mathbb{R}^N)$, $q > \frac{N(p-1)}{2}$), nájsť optimálne podmienky pre globálnu existenciu, skúmať stabilitu riešení, invariantné variety, ...

Pre všeobecnejšie úlohy: teória C^0-semigrúp

Formulka variácie konštánt

$$y_t = ay + y^p, \quad y(0) = y_0 : \qquad y(t) = e^{at} y_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} y^p(s)\, ds$$

$$u_t = \Delta u + u^p, \quad u(\cdot, 0) = u_0 : \qquad u(\cdot, t) = e^{\Delta t} u_0 + \int_0^t e^{\Delta(t-s)} u^p(\cdot, s)\, ds,$$

$$(e^{\Delta t} v)(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{|x-y|^2/4t} v(y)\, dy$$

Umožňuje: dokázať lokálnu existenciu a jednoznačnosť pre u_0 vo vhodných priestoroch funkcií (napr. $L^q(\mathbb{R}^N)$, $q > \frac{N(p-1)}{2}$), nájsť optimálne podmienky pre globálnu existenciu, skúmať stabilitu riešení, invariantné variety, ...

Pre všeobecnejšie úlohy: teória C^0-semigrúp

Energia (variačná štruktúra)

$$E(v) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - \frac{1}{p+1} v^{p+1}(x) \right) dx, \qquad v : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$$

Formálne: $\quad E'(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \Delta v + v^p \quad (1)_S$

– astrofyzika: Lane 1870, Emden 1907, Fowler 1930

– stojace vlny nelineárnej Schrödingerovej rovnice, dif. geometria, ...

[Fowler 1930–1931]

Ak $p \geq \frac{N+2}{N-2}$, potom existujú kladné, radiálne symetrické riešenia $(1)_S$.
$E(v)$ je definovaná len ak $p = \frac{N+2}{N-2}$

[Gida, Spruck 1981]

Ak $p < \frac{N+2}{N-2}$, potom neexistujú žiadne kladné riešenia $(1)_S$.
Táto Liouvilleova veta (aj energia E) sa dajú (okrem iného) použiť na skúmanie kladných riešení $(1)_S$ na ohraničených oblastiach.

Energia (variačná štruktúra)

$$E(v) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - \frac{1}{p+1} v^{p+1}(x) \right) dx, \qquad v : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$$

Formálne: $\quad E'(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \Delta v + v^p \quad (1)_S$

– astrofyzika: Lane 1870, Emden 1907, Fowler 1930

– stojace vlny nelineárnej Schrödingerovej rovnice, dif. geometria, ...

[Fowler 1930–1931]

Ak $p \geq \frac{N+2}{N-2}$, potom existujú kladné, radiálne symetrické riešenia $(1)_S$.
$E(v)$ je definovaná len ak $p = \frac{N+2}{N-2}$

[Gida, Spruck 1981]

Ak $p < \frac{N+2}{N-2}$, potom neexistujú žiadne kladné riešenia $(1)_S$.
Táto Liouvilleova veta (aj energia E) sa dajú (okrem iného) použiť na skúmanie kladných riešení $(1)_S$ na ohraničených oblastiach.

Energia (variačná štruktúra)

$$E(v) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\tfrac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - \tfrac{1}{p+1} v^{p+1}(x) \right) dx, \qquad v : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$$

Formálne: $\qquad E'(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \Delta v + v^p \quad (1)_S$

– astrofyzika: Lane 1870, Emden 1907, Fowler 1930

– stojace vlny nelineárnej Schrödingerovej rovnice, dif. geometria, ...

[Fowler 1930–1931]

Ak $p \geq \frac{N+2}{N-2}$, potom existujú kladné, radiálne symetrické riešenia $(1)_S$.
$E(v)$ je definovaná len ak $p = \frac{N+2}{N-2}$

[Gida, Spruck 1981]

Ak $p < \frac{N+2}{N-2}$, potom neexistujú žiadne kladné riešenia $(1)_S$.
Táto Liouvilleova veta (aj energia E) sa dajú (okrem iného) použiť na skúmanie kladných riešení $(1)_S$ na ohraničených oblastiach.

Energia (variačná štruktúra)

$$E(v) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - \frac{1}{p+1} v^{p+1}(x) \right) dx, \qquad v : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$$

Formálne: $E'(v) = 0 \iff 0 = \Delta v + v^p \quad (1)_S$

$$\frac{d}{dt} E(u(\cdot, t)) = - \int_{\mathbb{R}^N} u_t^2(x,t)\, dx \le 0 \qquad \ldots \text{ Ljapunovova funkcia}$$

[Fila, Yanagida 2011]

Pre $p > \frac{N+2}{N-2}$ existuje kladné (radiálne symetrické ak $p < \frac{N-4}{N-10}$) riešenie (1) definované pre $t \in (-\infty, \infty)$, $\lim_{t \to \pm\infty} u(\cdot, t) = 0$ (homoklinika)

[Poláčik, Q., Souplet 2007]

Pre $p < \frac{N+2}{N-2}$ žiadne kladné radiálne symetrické riešenie (1) definované pre $t \in (-\infty, \infty)$ neexistuje (Liouvilleova veta)

Energia (variačná štruktúra)

$$E(v) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - \frac{1}{p+1} v^{p+1}(x) \right) dx, \qquad v : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$$

Formálne: $\qquad E'(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \Delta v + v^p \quad (1)_S$

$$\frac{d}{dt} E(u(\cdot, t)) = -\int_{\mathbb{R}^N} u_t^2(x, t)\, dx \le 0 \qquad \ldots \text{ Ljapunovova funkcia}$$

[Fila, Yanagida 2011]

Pre $p > \frac{N+2}{N-2}$ existuje kladné (radiálne symetrické ak $p < \frac{N-4}{N-10}$) riešenie (1) definované pre $t \in (-\infty, \infty)$, $\lim_{t \to \pm\infty} u(\cdot, t) = 0$ (homoklinika)

[Poláčik, Q., Souplet 2007]

Pre $p < \frac{N+2}{N-2}$ žiadne kladné radiálne symetrické riešenie (1) definované pre $t \in (-\infty, \infty)$ neexistuje (Liouvilleova veta)

Energia (variačná štruktúra)

$$E(v) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - \frac{1}{p+1} v^{p+1}(x) \right) dx, \qquad v : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$$

Formálne: $\quad E'(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \Delta v + v^p \quad (1)_S$

$$\frac{d}{dt} E(u(\cdot, t)) = - \int_{\mathbb{R}^N} u_t^2(x, t)\, dx \le 0 \qquad \ldots \text{ Ljapunovova funkcia}$$

[Fila, Yanagida 2011]

Pre $p > \frac{N+2}{N-2}$ existuje kladné (radiálne symetrické ak $p < \frac{N-4}{N-10}$) riešenie (1) definované pre $t \in (-\infty, \infty)$, $\lim_{t \to \pm\infty} u(\cdot, t) = 0$ (homoklinika)

[Poláčik, Q., Souplet 2007]

Pre $p < \frac{N+2}{N-2}$ žiadne kladné radiálne symetrické riešenie (1) definované pre $t \in (-\infty, \infty)$ neexistuje (Liouvilleova veta)

Blow-up zo zápornej energie

$$u_t = \Delta u + u^p, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \;\; t > 0 \qquad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N \qquad (2)$$

$$E(v) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\tfrac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - \tfrac{1}{p+1} v^{p+1}(x) \right) dx, \qquad \frac{d}{dt} E(u(\cdot,t)) \le 0$$

[Levine 1973]

Ak $E(u_0) < 0$ potom riešenie (1)–(2) exploduje v konečnom čase.

Idea dôkazu:

$$M(t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^2(x,s)\, dx\, ds$$

$$MM'' \ge (1+\alpha)(M')^2, \quad t \ge t_0, \quad \Rightarrow \quad M^{-\alpha} \;\; \text{je konkávna}$$

Poznámka: Levine tvrdil $\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x,t)\, dx \to \infty$ pre $t \to T$.

Blow-up zo zápornej energie

$$u_t = \Delta u + u^p, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0 \qquad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N \qquad (2)$$

$$E(v) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - \frac{1}{p+1} v^{p+1}(x) \right) dx, \qquad \frac{d}{dt} E(u(\cdot, t)) \le 0$$

[Levine 1973]

Ak $E(u_0) < 0$ potom riešenie (1)–(2) exploduje v konečnom čase.

Idea dôkazu:

$$M(t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^2(x,s)\, dx\, ds$$

$$MM'' \ge (1+\alpha)(M')^2, \quad t \ge t_0, \quad \Rightarrow \quad M^{-\alpha} \ \text{ je konkávna}$$

Poznámka: Levine tvrdil $\int_{\mathbb{R}^N} u^2(x,t)\, dx \to \infty$ pre $t \to T$.

Existencia globálnych riešení

$$u_t = \Delta u + u^p, \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0 \qquad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N \qquad (2)$$

[Fujita 1966]

Ak $p < 1 + \frac{2}{N}$, potom všetky kladné riešenia (1)–(2) explodujú v konečnom čase. Ak $p > 1 + \frac{2}{N}$, potom pre "malé" u_0 je riešenie (1)–(2) globálne.

$p > 1 + \frac{2}{N}$: Pre malé u_0 globálna existencia, pre veľké blow-up

Otázka: Čo sa deje na prechode medzi globálnou existenciou a blow-up-om?

V závislosti na p, N, u_0 môže toto "hraničné" riešenie existovať globálne (a konvergovať k nule s rôznymi rýchlosťami poklesu, ku kladnému stacionárnemu riešeniu, k "nekonečnu") a môže tiež explodovať v konečnom čase.

$$u_t = \Delta u + u^p, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \; t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N \tag{2}$$

[Fujita 1966]

Ak $p < 1 + \frac{2}{N}$, potom všetky kladné riešenia (1)–(2) explodujú v konečnom čase. Ak $p > 1 + \frac{2}{N}$, potom pre "malé" u_0 je riešenie (1)–(2) globálne.

$p > 1 + \frac{2}{N}$: Pre malé u_0 globálna existencia, pre veľké blow-up

Otázka: Čo sa deje na prechode medzi globálnou existenciou a blow-up-om?

V závislosti na p, N, u_0 môže toto "hraničné" riešenie existovať globálne (a konvergovať k nule s rôznymi rýchlosťami poklesu, ku kladnému stacionárnemu riešeniu, k "nekonečnu") a môže tiež explodovať v konečnom čase.

Škálovanie

Ak $\lambda > 0$ a u je riešenie

$$u_t = \Delta u + u^p, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \tag{1}$$

potom $\quad u_\lambda(x,t) := \lambda^{2/(p-1)} u(\lambda x, \lambda^2 t) \quad$ tiež rieši (1).

Samopodobné riešenia: $u = u_\lambda$

$$u(x,t) = t^{-1/(p-1)} U\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big) \quad \text{resp.} \quad u(x,t) = (T-t)^{-1/(p-1)} U\Big(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\Big),$$

kde U rieši istú eliptickú rovnicu.

Otázka: Je rýchlosť explózie $(T-t)^{-1/(p-1)}$ rovnaká aj pre riešenia, ktoré nie sú samopodobné?

Rýchlosť explózie

$$u_t = \Delta u + u^p, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t \in (0, T) \qquad (1)$$

$$c(T-t)^{-1/(p-1)} \le \sup_x u(x,t) \le C(T-t)^{-1/(p-1)} \qquad (3)$$

[Giga, Kohn 1987]

Odhad (3) platí pre každé explodujúce kladné riešenie, ak $p < \frac{N+2}{N-2}$.
Dôkaz založený na škálovaní, energetických odhadoch a Liouvillovej vete.

[Herrero, Velázquez 1994 – preprint]

Ak $p > 1 + 4\frac{N-4+2\sqrt{N-1}}{(N-2)(N-10)}$, potom odhad (3) platiť nemusí.

Pre ostatné p sú známe len postačujúce podmienky na u_0 zaručujúce odhad (3). V prípade riešení, ktoré menia znamienko, platí odhad (3) tiež pre $p < \frac{N+2}{N-2}$ (Giga, Matsui, Sasayma 2004) ale nemusí platiť pre $p = \frac{N+2}{N-2}$ (Filippas, Herrero, Velázquez 2000: $N \le 6$; Schweyer 2012: $N = 4$).

Rýchlosť explózie

$$u_t = \Delta u + u^p, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t \in (0, T) \tag{1}$$

$$c(T-t)^{-1/(p-1)} \le \sup_x u(x,t) \le C(T-t)^{-1/(p-1)} \tag{3}$$

[Giga, Kohn 1987]

Odhad (3) platí pre každé explodujúce kladné riešenie, ak $p < \frac{N+2}{N-2}$.
Dôkaz založený na škálovaní, energetických odhadoch a Liouvillovej vete.

[Herrero, Velázquez 1994 – preprint]

Ak $p > 1 + 4\frac{N-4+2\sqrt{N-1}}{(N-2)(N-10)}$, potom odhad (3) platiť nemusí.

Pre ostatné p sú známe len postačujúce podmienky na u_0 zaručujúce odhad (3). V prípade riešení, ktoré menia znamienko, platí odhad (3) tiež pre $p < \frac{N+2}{N-2}$ (Giga, Matsui, Sasayma 2004) ale nemusí platiť pre $p = \frac{N+2}{N-2}$ (Filippas, Herrero, Velázquez 2000: $N \le 6$; Schweyer 2012: $N = 4$).

$$u_t = \Delta u + u^p, \quad x \in \mathbb{R}^N, \ t \in (0, T) \qquad (1)$$

$$c(T-t)^{-1/(p-1)} \le \sup_x u(x,t) \le C(T-t)^{-1/(p-1)} \qquad (3)$$

[Giga, Kohn 1987]

Odhad (3) platí pre každé explodujúce kladné riešenie, ak $p < \frac{N+2}{N-2}$.
Dôkaz založený na škálovaní, energetických odhadoch a Liouvillovej vete.

[Herrero, Velázquez 1994 – preprint]

Ak $p > 1 + 4\frac{N-4+2\sqrt{N-1}}{(N-2)(N-10)}$, potom odhad (3) platiť nemusí.

Pre ostatné p sú známe len postačujúce podmienky na u_0 zaručujúce odhad (3). V prípade riešení, ktoré menia znamienko, platí odhad (3) tiež pre $p < \frac{N+2}{N-2}$ (Giga, Matsui, Sasayma 2004) ale nemusí platiť pre $p = \frac{N+2}{N-2}$ (Filippas, Herrero, Velázquez 2000: $N \le 6$; Schweyer 2012: $N = 4$).

$$u_t = \Delta u + u^p, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t \in (0,T) \tag{1}$$

$$c(T-t)^{-1/(p-1)} \le \sup_x u(x,t) \le C(T-t)^{-1/(p-1)} \tag{3}$$

[Giga, Kohn 1987]

Odhad (3) platí pre každé explodujúce kladné riešenie, ak $p < \frac{N+2}{N-2}$. Dôkaz založený na škálovaní, energetických odhadoch a Liouvillovej vete.

[Herrero, Velázquez 1994 – preprint]

Ak $p > 1 + 4\frac{N-4+2\sqrt{N-1}}{(N-2)(N-10)}$, potom odhad (3) platiť nemusí.

Pre ostatné p sú známe len postačujúce podmienky na u_0 zaručujúce odhad (3). V prípade riešení, ktoré menia znamienko, platí odhad (3) tiež pre $p < \frac{N+2}{N-2}$ (Giga, Matsui, Sasayma 2004) ale nemusí platiť pre $p = \frac{N+2}{N-2}$ (Filippas, Herrero, Velázquez 2000: $N \le 6$; Schweyer 2012: $N = 4$).

Porovnávací princíp

Ak $u_0 \leq v_0$, potom $u(x,t) \leq v(x,t)$.

- Porovnávanie so (známymi) stacionárnymi a samopodobnými riešeniami často umožňuje dokázať gobálnu existenciu, apriórne odhady prípadne blow-up riešení.
- Princíp maxima sa často používa aj na kombináciu riešenia a jeho derivácií, napr. $u_t - \varepsilon u^p$ alebo $r^{N-1} u_r + \varepsilon r^{N+\delta} u^q$.

Jemnejšie výsledky možno dostať v radiálne symetrickom prípade:

Zero number

Ak sú u, v radiálne symetrické riešenia, potom je počet ich priesečníkov diskrétny Ljapunovov funkcionál.

V prípade systémov princíp maxima vo všeobecnosti neplatí, ale často sa dá dokázať pre vhodnú nelineárnu kombináciu jednotlivých komponent.

Porovnávací princíp

Ak $u_0 \leq v_0$, potom $u(x,t) \leq v(x,t)$.

- Porovnávanie so (známymi) stacionárnymi a samopodobnými riešeniami často umožňuje dokázať gobálnu existenciu, apriórne odhady prípadne blow-up riešení.
- Princíp maxima sa často používa aj na kombináciu riešenia a jeho derivácií, napr. $u_t - \varepsilon u^p$ alebo $r^{N-1} u_r + \varepsilon r^{N+\delta} u^q$.

Jemnejšie výsledky možno dostať v radiálne symetrickom prípade:

Zero number

Ak sú u, v radiálne symetrické riešenia, potom je počet ich priesečníkov diskrétny Ljapunovov funkcionál.

V prípade systémov princíp maxima vo všeobecnosti neplatí, ale často sa dá dokázať pre vhodnú nelineárnu kombináciu jednotlivých komponent.