

Prečo matematici počítajú mapy?

Roman Nedela

Univerzita Mateja Bela
Banská Bystrica, Slovensko

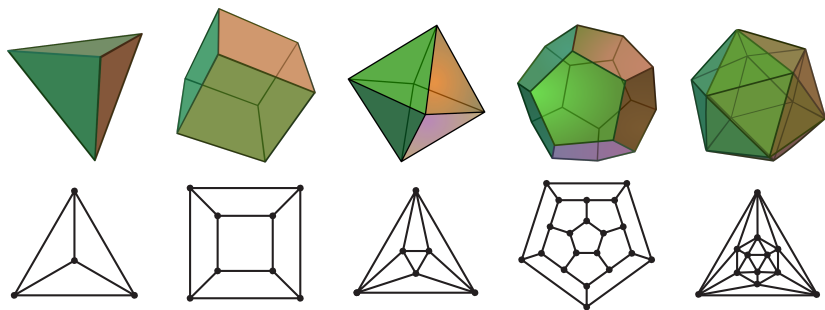


Figure 1 : Platónske telesá a ich mapy.

Čo to je mapa?

Topologická mapa

je bunková dekompozícia kompaktnej súvislej plochy

Kombinatorická mapa

Graf (pekne) nakreslený na ploche

bunky

dim. 0 - vrcholy, dim. 1 - hrany, dim. 2 - steny

Čo to je mapa?

Topologická mapa

je bunková dekompozícia kompaktnej súvislej plochy

Kombinatorická mapa

Graf (pekne) nakreslený na ploche

bunky

dim. 0 - vrcholy, dim. 1 - hrany, dim. 2 - steny

Čo to je mapa?

Topologická mapa

je bunková dekompozícia kompaktnej súvislej plochy

Kombinatorická mapa

Graf (pekne) nakreslený na ploche

bunky

dim. 0 - vrcholy, dim. 1 - hrany, dim. 2 - steny

Enumeráčn  problémy

Koľko je koreňov ch máp?

Koľko je koreňov ch máp na danej ploche s n hranami (v vrcholmi a f oblast'ami)?

Koľko je neizomorfn ch máp?

Koľko je vzájomne neizomorfn ch máp na danej ploche s n hranami?

Variácie oboch problémov:

Koľko je vzájomne neizomorfn ch máp na danej ploche s n hranami danej vlastnosti? bipartitn e, dvojsuvisl e, jednooblastn e, triangulácie

Enumeráčn  problémy

Koľko je koreňov ch máp?

Koľko je koreňov ch máp na danej ploche s n hranami (v vrcholmi a f oblast'ami)?

Koľko je neizomorfn ch máp?

Koľko je vzájomne neizomorfn ch máp na danej ploche s n hranami?

Variácie oboch problémov:

Koľko je vzájomne neizomorfn ch máp na danej ploche s n hranami danej vlastnosti? bipartitn , dvojsuvisl , jednooblastn , triangulácie

Enumeráčn  problémy

Koľko je koreňov ch máp?

Koľko je koreňov ch máp na danej ploche s n hranami (v vrcholmi a f oblast'ami)?

Koľko je neizomorfn ch máp?

Koľko je vzájomne neizomorfn ch máp na danej ploche s n hranami?

Variácie oboch problémov:

Koľko je vzájomne neizomorfn ch máp na danej ploche s n hranami danej vlastnosti? bipartitn , dvojsuvisl , jednooblastn , triangulácie

Vzorka sférických koreňových map

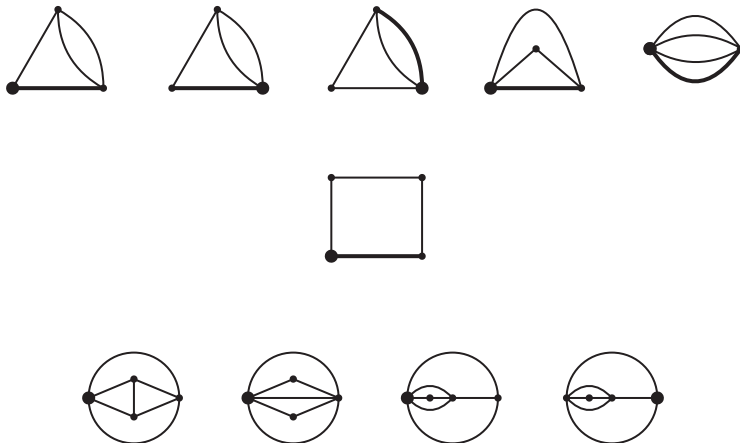


Figure 2 : Counting maps on the sphere.

Dôležité myšlienky a výsledky

(1) Steinitzova teoréma:

Mapa je polyhedrálna práve vtedy, ak je planárna a 3-súvislá.

(2) Kuratowského teoréma:

Graf je planárny práve vtedy, ak neobsahuje subdivíziu K_5 alebo $K_{3,3}$.

(3) Robertson-Seymourova teoréma:

Grafy sú dobre kvázi uzporiadané vzhl'adom na usporiadanie byť minorom. Inak, triedy grafov uzavreté na kontrakciu hrany a podgrafy možno charakterizovať pomocou konečného počtu zakázaných podgrafov.

(4) Euler-Poincarého teoréma

Kompaktná súvislá plocha S je úplne určená svojou Eulerovou charakteristikou χ a orientovateľnosťou, pričom pre ľubovoľnú mapu na S platí:

$$v - e + f = \chi,$$

kde v , e a f sú počty vrcholov, hrán a oblastí a $\chi = 2 - 2g$ v orientovateľnom prípade, $2 - \tilde{g}$ v neorientovateľnom prípade.

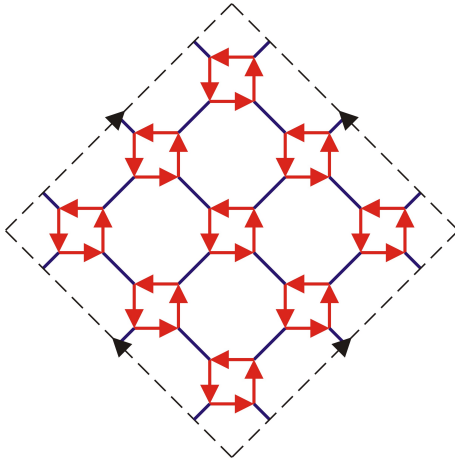
- 1 **Externá motivácia:** chémia (uhl'ovodíky, fulleríny), **štatistická fyzika**, 2-dimenzionálne gravitačné polia, teória strún, biológia ...
- 2 **Matematická motivácia:** počítanie nakrytí, počítanie podgrúp daného indexu v nejakej univerzálnej grupe, skúmanie akcie absolútnej Galoisovej grupy na mapách, algebraické krivky,...
- 3 **Motivácia vnútri teórie máp:** Generovanie máp, asymptotické správanie máp, , **Fenomén Chirality versus Reflexibility**,...

Prečo počítame mapy

- 1 **Externá motivácia:** chémia (uhl'ovodíky, fulleríny), **štatistická fyzika**, 2-dimenzionálne gravitačné polia, teória strún, biológia ...
- 2 **Matematická motivácia:** počítanie nakrytí, počítanie podgrúp daného indexu v nejakej univerzálnej grupe, skúmanie akcie absolútnej Galoisovej grupy na mapách, algebraické krivky,...
- 3 **Motivácia vnútri teórie máp:** Generovanie máp, asymptotické správanie máp, , Fenomén Chirality versus Reflexibility,...

- 1 **Externá motivácia:** chémia (uhl'ovodíky, fulleríny), **štatistická fyzika**, 2-dimenzionálne gravitačné polia, teória strún, biológia ...
- 2 **Matematická motivácia:** počítanie nakrytí, počítanie podgrúp daného indexu v nejakej univerzálnej grupe, skúmanie akcie absolútnej Galoisovej grupy na mapách, algebraické krivky,...
- 3 **Motivácia vnútri teórie máp:** Generovanie máp, asymptotické správanie máp, , **Fenomén Chirality versus Reflexibility**,...

Feynmann diagrams



Kategória ORMAPS

$(X; R), (D; R, L), L^2 = 1$ a $Mon(M) = \langle R, L \rangle$ je tranzitívna na D ,
(súvislosť)

Kategória MAPS

$(F; \lambda, \rho, \tau), \lambda^2 = \tau^2 = \rho^2 = (\lambda\tau)^2 = 1, \langle \lambda, \rho, \tau \rangle$ je tranzitívna na F .

Permutačný opis mapy $(D; R, L)$

$$R = (1, 2, 3)(1^{-1}, 6, 5^{-1})(2^{-1}, 5, 4^{-1})(3^{-1}, 4, 6^{-1})$$

$$L : x \mapsto x^{-1}.$$

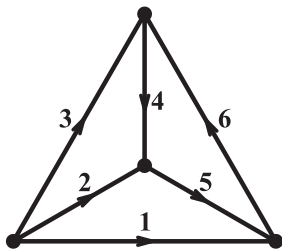


Figure 3 : Tetrahedral map.

Permutačný opis mapy $(F; \tau_0, \tau_1, \tau_2)$

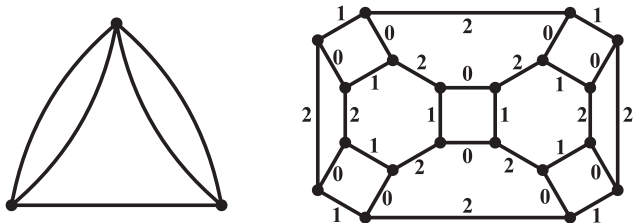


Figure 4 : Map and its graph encoding.

Orientovateľnosť a chiralita

Opis nie je závislý od orientácie, automorfizmy takýchto máp môžu meniť orientáciu plochy.

Daná plocha je **orientovateľná**, ak kryštalizácia (duál barycentrickej subdivízie) je **bipartitná**.

Algoritmus na zisťovanie orientovateľnosti.

Takto sa dá zisťovať orientovateľnosť aj v simplicciálnych komplexoch a pod. štruktúrach vyššej dimenzie.

Orientovateľná mapa je izomorfná svojmu zrkadlovému obrazu práve vtedy, ak bipartície prehadzujúci automorfizmus kryštalizácie.

Orientovateľnosť a chiralita

Opis nie je závislý od orientácie, automorfizmy takýchto máp môžu meniť orientáciu plochy.

Daná plocha je **orientovateľná**, ak kryštalizácia (duál barycentrickej subdivízie) je **bipartitná**.

Algoritmus na zisťovanie orientovateľnosti.

Takto sa dá zisťovať orientovateľnosť aj v simpliciaciálnych komplexoch a pod. štruktúrach vyššej dimenzie.

Orientovateľná mapa je izomorfná svojmu zrkadlovému obrazu práve vtedy, ak bipartície prehadzujúci automorfizmus kryštalizácie.

Orientovateľnosť a chiralita

Opis nie je závislý od orientácie, automorfizmy takýchto máp môžu meniť orientáciu plochy.

Daná plocha je **orientovateľná**, ak kryštalizácia (duál barycentrickej subdivízie) je **bipartitná**.

Algoritmus na zisťovanie orientovateľnosti.

Takto sa dá zisťovať orientovateľnosť aj v simpliciaciálnych komplexoch a pod. štruktúrach vyššej dimenzie.

Orientovateľná mapa je izomorfná svojmu zrkadlovému obrazu práve vtedy, ak bipartície prehadzujúci automorfizmus kryštalizácie.

Orientovateľnosť a chiralita

Opis nie je závislý od orientácie, automorfizmy takýchto máp môžu meniť orientáciu plochy.

Daná plocha je **orientovateľná**, ak kryštalizácia (duál barycentrickej subdivízie) je **bipartitná**.

Algoritmus na zisťovanie orientovateľnosti.

Takto sa dá zisťovať orientovateľnosť aj v simpliciaciálnych komplexoch a pod. štruktúrach vyššej dimenzie.

Orientovateľná mapa je izomorfná svojmu zrkadlovému obrazu práve vtedy, ak bipartície prehadzujúci automorfizmus kryštalizácie.

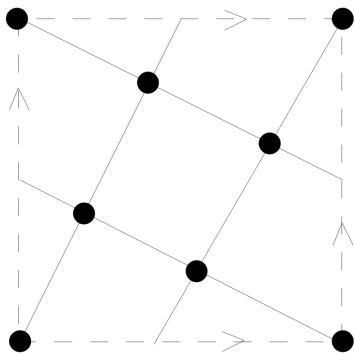
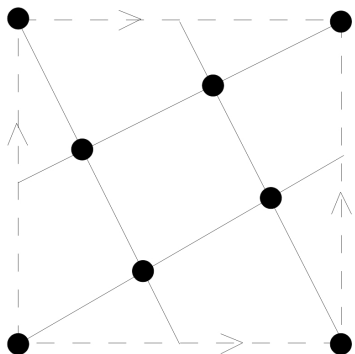


Figure 5 : Regular embedding of K_5 in the torus appears in two ‘enantiomers’, in the category of ORMAPS they are not isomorphic.

Poznámka

V regulárnej mape je akcia grupy automorfizmov tranzitívna na vrcholoch, oblastiach aj hranách, preto regularita implikuje kombinatorickú uniformnosť.

Význam pre enumerácie

Namiesto topologických máp počítame permutačné diagramy, konečné objekty

Ľahšie je možné uchopiť pre enumerácie významnú otázku, ktoré mapy budeme považovať za totožné a ktoré rozlíšime

Zadaním koreňa sa trivializuje grupa symetrií, tým sa enumerácia zjednoduší,

Význam pre enumerácie

Namiesto topologických máp počítame permutačné diagramy, konečné objekty

L'ahšie je možné uchopiť pre enumerácie významnú otázku, ktoré mapy budeme považovať za totožné a ktoré rozlíšime

Zadaním koreňa sa trivializuje grupa symetrií, tým sa enumerácia zjednoduší,

Význam pre enumerácie

Namiesto topologických máp počítame permutačné diagramy, konečné objekty

L'ahšie je možné uchopiť pre enumerácie významnú otázku, ktoré mapy budeme považovať za totožné a ktoré rozlíšime

Zadaním koreňa sa trivializuje grupa symetrií, tým sa enumerácia zjednoduší,

Symetrie máp a plôch

Riemann-Hurwitzova veta

vzťah medzi Eulerovými charakteristikami dvoch nakrývajúcich sa máp.

Hurwitzovo ohraničenie

Rád grupy (orientáciu zachovávajúcich) automorfizmov mapy rodu $g > 1$ je najviac $84(g - 1)$

Poznámka

Pre kategóriu MAPS je situácia zložitejšia, totiž M/G môže byť plocha s krajom. Grupa automorfizmov je v tomto prípade $\leq 168(g - 1)$.

Symetrie máp a plôch

Riemann-Hurwitzova veta

vzťah medzi Eulerovými charakteristikami dvoch nakrývajúcich sa máp.

Hurwitzovo ohraničenie

Rád grupy (orientáciu zachovávajúcich) automorfizmov mapy rodu $g > 1$ je najviac $84(g - 1)$

Poznámka

Pre kategóriu MAPS je situácia zložitejšia, totiž M/G môže byť plocha s krajom. Grupa automorfizmov je v tomto prípade $\leq 168(g - 1)$.

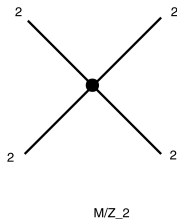
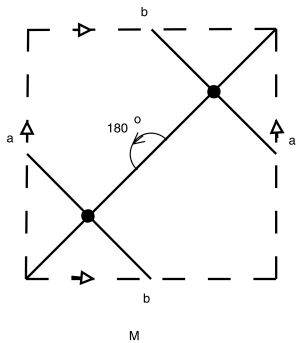


Figure 6 : Akcia grupy \mathbb{Z}_2 na torickej mape typu $[0; 2^4]$ a príslušný kvocient

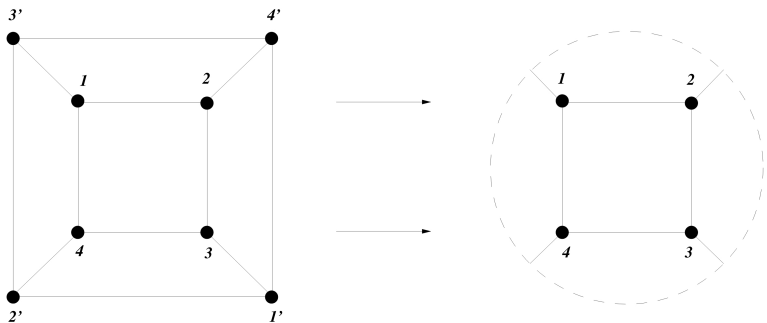
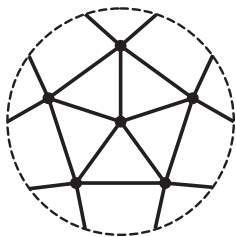
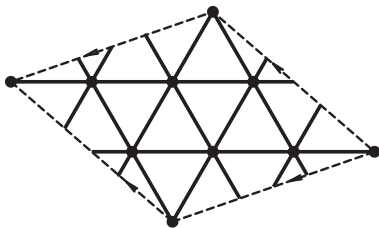


Figure 7 : Antipodálna akcia grupy \mathbb{Z}_2 na kocke a jej kvocient v proj. rovine



(a)



(b)

Figure 8 : Triangular imbeddings of K_6 into the projective plane and K_7 into the torus.

Univerzálne nakrytia

Označme

$\Delta^+(\infty, \infty, 2) = \langle r, \ell | \ell^2 = 1 \rangle$ univerzálna trojuholníková grupa,

$\Delta^+(p, q, 2) = \langle r, \ell | r^p = (r\ell)^q = \ell^2 = 1 \rangle$ trojuholníková grupa typu (p, q) .

Zrejme pre danú or. mapu $(D; R, L)$ s grupou monodrómie $\langle R, L \rangle$ existuje **kánonický epimorfizmus** $\Phi : r \mapsto R, \ell \mapsto L$.

Podobne, $|R| = p$ a $|RL| = q$, tak priradenie $r \mapsto R, \ell \mapsto L$ možno rozšíriť na epimorfizmus $\Delta^+(p, q, 2) \rightarrow \text{Mon}(M)$.

Mapa odpovedajúca $G = \Delta^+, \Delta^+(p, q, 2)$ sa definuje nasledovne:
 $D = \Delta^+, \tilde{R}x = rx, \tilde{L}x = \ell x$.

Univerzálne nakrytia

Označme

$\Delta^+(\infty, \infty, 2) = \langle r, \ell | \ell^2 = 1 \rangle$ univerzálna trojuholníková grupa,

$\Delta^+(p, q, 2) = \langle r, \ell | r^p = (r\ell)^q = \ell^2 = 1 \rangle$ trojuholníková grupa typu (p, q) .

Zrejme pre danú or. mapu $(D; R, L)$ s grupou monodrómie $\langle R, L \rangle$ existuje **kánonický epimorfizmus** $\Phi : r \mapsto R, \ell \mapsto L$.

Podobne, $|R| = p$ a $|RL| = q$, tak priradenie $r \mapsto R, \ell \mapsto L$ možno rozšíriť na epimorfizmus $\Delta^+(p, q, 2) \rightarrow \text{Mon}(M)$.

Mapa odpovedajúca $G = \Delta^+, \Delta^+(p, q, 2)$ sa definuje nasledovne:
 $D = \Delta^+, \tilde{R}x = rx, \tilde{L}x = \ell x$.

Univerzálne nakrytia

Označme

$\Delta^+(\infty, \infty, 2) = \langle r, \ell \mid \ell^2 = 1 \rangle$ univerzálna trojuholníková grupa,

$\Delta^+(p, q, 2) = \langle r, \ell \mid r^p = (r\ell)^q = \ell^2 = 1 \rangle$ trojuholníková grupa typu (p, q) .

Zrejme pre danú or. mapu $(D; R, L)$ s grupou monodrómie $\langle R, L \rangle$ existuje **kánonický epimorfizmus** $\Phi : r \mapsto R, \ell \mapsto L$.

Podobne, $|R| = p$ a $|RL| = q$, tak priradenie $r \mapsto R, \ell \mapsto L$ možno rozšíriť na epimorfizmus $\Delta^+(p, q, 2) \rightarrow \text{Mon}(M)$.

Mapa odpovedajúca $G = \Delta^+, \Delta^+(p, q, 2)$ sa definuje nasledovne:
 $D = \Delta^+, \tilde{R}x = rx, \tilde{L}x = \ell x$.

Univerzálne nakrytia

Označme

$\Delta^+(\infty, \infty, 2) = \langle r, \ell | \ell^2 = 1 \rangle$ univerzálna trojuholníková grupa,

$\Delta^+(p, q, 2) = \langle r, \ell | r^p = (r\ell)^q = \ell^2 = 1 \rangle$ trojuholníková grupa typu (p, q) .

Zrejme pre danú or. mapu $(D; R, L)$ s grupou monodrómie $\langle R, L \rangle$ existuje **kánonický epimorfizmus** $\Phi : r \mapsto R, \ell \mapsto L$.

Podobne, $|R| = p$ a $|RL| = q$, tak priradenie $r \mapsto R, \ell \mapsto L$ možno rozšíriť na epimorfizmus $\Delta^+(p, q, 2) \rightarrow \text{Mon}(M)$.

Mapa odpovedajúca $G = \Delta^+, \Delta^+(p, q, 2)$ sa definuje nasledovne:
 $D = \Delta^+, \tilde{R}x = rx, \tilde{L}x = \ell x$.

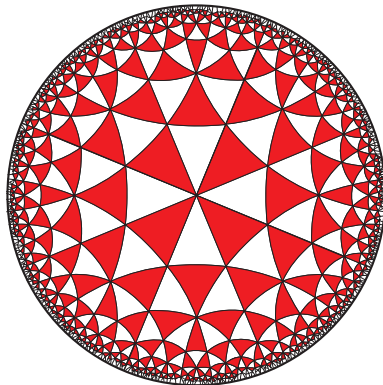


Figure 9 : Reflection symmetries of the hyperbolic tessellation $\{6, 4\}$.

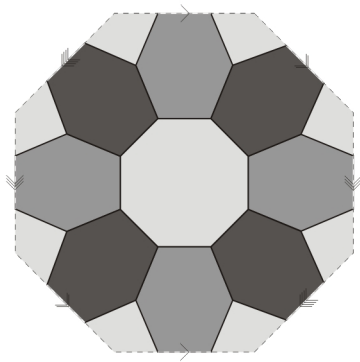


Figure 10 : Totally self-dual regular hypermap of type $(4, 4, 4)$ of genus 2 arises as a quotient of the triangle $\Delta^+(4, 4, 4)$ by a characteristic subgroup .

VONKAJŠIE AUTOMORFIZMY a MONOMORFIZMY $\Delta^+(p, q, r)$
MAJÚ GEOMETRICKÚ INTERPRETÁCIU, napr. dualita, Petrie
dualita, antipodalita, exponenty,...

Napr. Ak $(D; R, L)$ je ikosaedrálna mapa, tak $(D; R^2, L)$ je **Keplerov veľký dodekaeder** - regulárna mapa typu $(5, 5)$ Eulerovej charakteristiky $12 - 30 + 60/5 = -6, g = 4$.

Od kombinatoriky ku geometrii

$S \leq \Delta^+$ je nekonečná podgrupa indexu $|D|$, teda mapa odpovedajúca trojuholníkovej grupe nie je na kompaktnej ploche.

MÁ TEDA TÁ UNIVERZÁLNA MAPA GEOMETRICKÚ INTERPRETÁCIU?

Jednoduchšie je zodpovedať otázku geometrie univerzálnych máp typu (p, q) , chceme pekné mapy = rovnaké uhly, hrany tvoria najkratšie spojnice.

Ak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$, tak univerzálne mapy sú Platónske telesá na sfére, napr. oktaéder má všetky uhly pravé, trojuholníkové grupy $\Delta^+(p, q, 2)$ sú konečné, $p, q > 2$.

$S \leq \Delta^+$ je nekonečná podgrupa indexu $|D|$, teda mapa odpovedajúca trojuholníkovej grupe nie je na kompaktnjej ploche.

MÁ TEDA TÁ UNIVERZÁLNA MAPA GEOMETRICKÚ INTERPRETÁCIU?

Jednoduchšie je zodpovedať otázku geometrie univerzálnych máp typu (p, q) , chceme pekné mapy = rovnaké uhly, hrany tvoria najkratšie spojnice.

Ak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$, tak univerzálne mapy sú Platónske telesá na sfére, napr. oktaéder má všetky uhly pravé, trojuholníkové grupy $\Delta^+(p, q, 2)$ sú konečné, $p, q > 2$.

Ak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$, E-P veta dáva 2 riešenia $(p, q) = (4, 4), (6, 3)$.

Univerzálne mapy sú v tomto prípade 4-uholníkové, resp.

6-uholníkové pokrytie **Euklidovskej roviny**, grupa $\Delta^+(4, 4, 2)$ je podgrupou grupy izometrií roviny, odtiaľ ľahko nahliadneme jej štruktúru.

Zatiaľčo $\Delta^+(4, 4, 2)$ je grupa s jednoduchou štruktúrou $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}_4$, $\Delta^+(7, 3, 2)$ je omnoho komplikovanejšia, napríklad takmer všetky jednoduché grupy sú jej epimorfnými obrazmi. Je podrupou grupy izometrií hyperbolickej roviny.

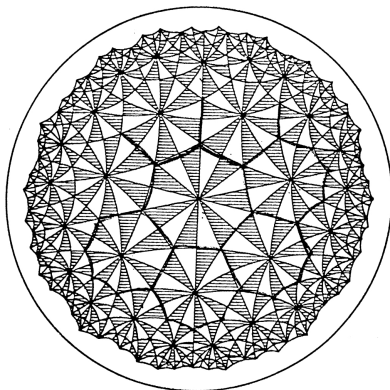


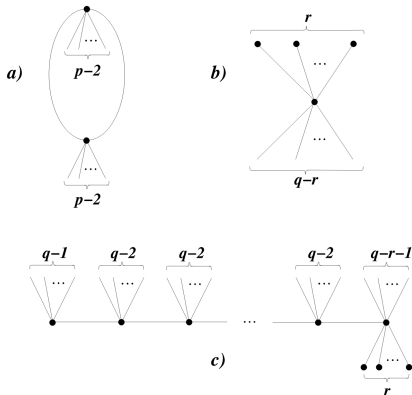
Figure 12 : Barycentric subdivision of the universal Hurwitz map

Klasifikačné problémy z teórie symetrických máp

1976 Grünbaumov problém

Existuje (nekonečne) veľa máp daného hyperbolického typu?

Dôkaz existencie pomocou Dessigns d'enfants, $p = kq + r$, $0 \leq r < q$



Dôkaz použitím Mal'cevovej vety

Trojuholníková grupa $\Delta(p, q, 2)$ je maticová grupa. Podľa Mal'cevovej vety maticové grupy sú reziduálne konečné.

Súvisiace problémy

Theorem (Miller 1902)

For any three integers p , q , and n , all greater than 1, there exist infinitely many pairs of permutations α , β such that α has order p , β has order q , and $\alpha\beta$ has order n , except that the three numbers are 2, 3, 3 or 2, 3, 4 or 2, 3, 5 (ordered arbitrarily) or two of the numbers are 2.

Theorem (MacBeath)

There exist infinitely many Hurwitz groups.

Higmannov problém

Je pravda, že pre daný hyperbolický typ (p, q, r) existuje n_0 také, že pre každé $n > n_0$ alternujúca grupa \mathbb{A}_n je epimorfným obrazom $\Delta(p, q, r)$?

Riešenie Conder, Everitt

Súvisiace problémy

Theorem (Miller 1902)

For any three integers p , q , and n , all greater than 1, there exist infinitely many pairs of permutations α , β such that α has order p , β has order q , and $\alpha\beta$ has order n , except that the three numbers are 2, 3, 3 or 2, 3, 4 or 2, 3, 5 (ordered arbitrarily) or two of the numbers are 2.

Theorem (MacBeath)

There exist infinitely many Hurwitz groups.

Higmannov problém

Je pravda, že pre daný hyperbolický typ (p, q, r) existuje n_0 také, že pre každé $n > n_0$ alternujúca grupa \mathbb{A}_n je epimorfným obrazom $\Delta(p, q, r)$?

Riešenie Conder, Everitt

Súvisiace problémy

Theorem (Miller 1902)

For any three integers p , q , and n , all greater than 1, there exist infinitely many pairs of permutations α , β such that α has order p , β has order q , and $\alpha\beta$ has order n , except that the three numbers are 2, 3, 3 or 2, 3, 4 or 2, 3, 5 (ordered arbitrarily) or two of the numbers are 2.

Theorem (MacBeath)

There exist infinitely many Hurwitz groups.

Higmannov problém

Je pravda, že pre daný hyperbolický typ (p, q, r) existuje n_0 také, že pre každé $n > n_0$ alternujúca grupa \mathbb{A}_n je epimorfným obrazom $\Delta(p, q, r)$?

Riešenie Conder, Everitt

REGULÁRNE MAPY DANÉHO RODU

Z Hurwitzovho odhadu vyplýva, že regulárna mapa rodu > 1 má počet šípov najviac $84(g - 1)$.

Problém

Predanú plochu S klasifikujte regulárne mapy na S .

Pre plochy malého rodu možno nájsť normálne podgrupy malého indexu grupy $\Delta(\infty, \infty, 2)$ daného rodu.

Tak získame nasledovnú tabuľku Conder, Everitt 2001:

REGULÁRNE MAPY DANÉHO RODU

Rod	No. maps	chiral	nrod	no. maps	nrod	no.maps
2	6	-	2	-	16	8
3	12	-	3	-	17	4
4	12	-	4	2	18	-
5	12	-	5	4	19	1
6	13	-	6	3	20	5
7	14	2	7	2	21	1
8	12	1	8	1	22	4
9	32	3	9	3	23	4
10	27	3	10	3	24	-
11	20	6	11	2	25	3
12	14	2	12	3	26	3
13	22	-	13	2	27	-
14	13	1	14	3	28	2
15	24	1	15	1	29	6

REGULÁRNE MAPY DANÉHO RODU

Problém Conder-Everitt 1995

Existuje nekonečne veľa plôch, na ktorých nie je žiadna regulárna mapa?

Breda, Nedela a Širáň

Klasifikácia regulárnych máp prvočíselnej Eulerovej charakteristiky, TAMS 2005.

Regulárne mapy prvočíselnej Eulerovej charakteristiky

Ak $p \equiv -1 \pmod{4}$ označme $\nu(p)$ počet dvojíc prirodzených čísel (j, l) takých, že $j > l \geq 3$, j aj l sú nepárne, a $(j-1)(l-1) = p+1$.

Theorem

Nech p je prvočíslo, $p \neq 2, 7, 13$, and let \mathcal{N}_{p+2} je neorientovateľná plocha Eulerovej charakteristiky $-p$.

- (1) Ak $p \equiv 1 \pmod{12}$, potom **neexistuje** regulárna mapa na \mathcal{N}_{p+2} .*
- (2) Ak $p \equiv 5 \pmod{12}$ potom, až na izomorfizmus a dualitu, existuje presne jedna regulárna mapa na \mathcal{N}_{p+2} .*
- (3) Ak $p \equiv -5 \pmod{12}$ potom, až na izomorfizmus a dualitu, existuje $\nu(p)$ regulárnych máp na \mathcal{N}_{p+2} .*
- (4) Ak $p \equiv -1 \pmod{12}$ potom, až na izomorfizmus a dualitu, existuje $\nu(p) + 1$ regulárnych máp na \mathcal{N}_{p+2} .*

OTÁZKA

Ako je to s existenciou chirálnych máp?

KLASIFIKÁCIA VEĽKÝCH GRÚP AUTOMORFIZMOV
RIEMANNOVÝCH/KLEINOVÝCH PLÔCH?

Enumerácia koreňových máp daného rodu

$g = 0$, n počet hrán, Tutte 1963

$$m_0(n) = \frac{2 \cdot 3^n (2n)!}{n!(n+2)!}.$$

Arqués, Giorgetti 1999

Odvodili generujúcu funkciu pre ľubovoľný rod $g > 0$, až na koeficienty neznámeho polynómu stupňa najviac $6g - 6$

Konkrétne enumeračné vzorce

- 1 1987: Arqués $g = 1$,
- 2 1991: Bender, Canfield $g = 2, 3$,
- 3 2011: Mednykh, Giorgetti $g = 4$,
- 4 2012: Walsh, Mednykh, Giorgetti $5 \leq g \leq 11$.

ENUMERÁCIA MÁP DANÉHO RODU

Liskovets, Wormald (1981)

Vzorec pre počet máp na sfére. Pre $g > 0$ riešenie nebolo známe.

Theorem (Mednykh, Nedela JCTB 2006)

$$\Theta_\gamma(n) = \frac{1}{n} \sum_{\ell|n, n=\ell m} \sum_{O \in \text{Orb}(S_\gamma/Z_\ell)} \text{Epi}_0(\pi_1(O), Z_\ell) \Psi_O(m).$$

$\pi_1(O)$ je F -grupa, generovaná a_i, b_i a e_j , pričom platí:

$$\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^r e_j = 1, \quad e_j^{m_j} = 1 \text{ pre každé } j = 1, \dots, r.$$

$\text{Epi}_0(\pi_1(O), Z_\ell)$ je aritmetická číselno-teoretická funkcia,
 $\Psi_O(m)$ možno vyjadriť ako pomocou klasických Tuttových funkcií.

Genesis of toroidal maps

No. edges, No. rooted maps , No. unrooted maps:

02, 1, 1

03, 20, 6

04, 307, 46

05, 4280, 452

06, 56914, 4852

07, 736568, 52972

08, 9370183, 587047

09, 117822512, 6550808

10, 1469283166, 73483256

11, 18210135416, 827801468

12, 224636864830, 9360123740

13, 2760899996816, 106189359544

14, 33833099832484, 1208328304864

15, 413610917006000, 13787042250528

16, 5046403030066927, 157700137398689

17, 61468359153954656, 1807893066408464

18, 747672504476150374, 20768681225892328

Toroidal maps

19, 9083423595292949240, 239037464947999900
20, 110239596847544663002, 2755989928117365244
21, 1336700736225591436496, 31826208029615881656
22, 16195256987701502444284, 368074022535205870382
23, 196082659434035163992720, 4262666509741017440552
24, 2372588693872584957422422, 49428931123444048643388
25, 28692390789135657427179680, 573847815786545413529104
26, 346814241363774726576771244, 6669504641624799675973078
27, 4190197092308320889669166128, 77596242450201993985513136
28, 50605520500653135912761192668 903670008940406050891508432
29, 610946861846663952302648987552
10533566583563768540393559344
30, 7373356726039234245335035186504
122889278767322703855171530872

Asymptotické správanie máp

Bender, Canfield 1986

$m_g(n) \sim t_g n^{5(g-1)/2} 12^n$, kde t_g je konštanta vypočítateľná pomocou nelineárnej rekurzie. Hodnoty pre sféru a torus sú $t_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $t_1 = \frac{1}{24}$.

Richmond, Canfield 1995

Takmer všetky mapy daného rodu sú rigidné, mapy s netriviálnou symetriou tvoria exponenciálne malú časť.

Drmotá, Nedela 2011

Asymptoticky reflexibilné mapy tvoria približne druhú odmocninu všetkých máp

$$\log A(n) \sim \frac{1}{2} \log U(n) \sim (n/2) \log n$$