O rovnostárskych deleniach koláča

Katarína Cechlárová

spoločne s Jozef Dobošom and E. Pillárovou

UPJŠ Košice

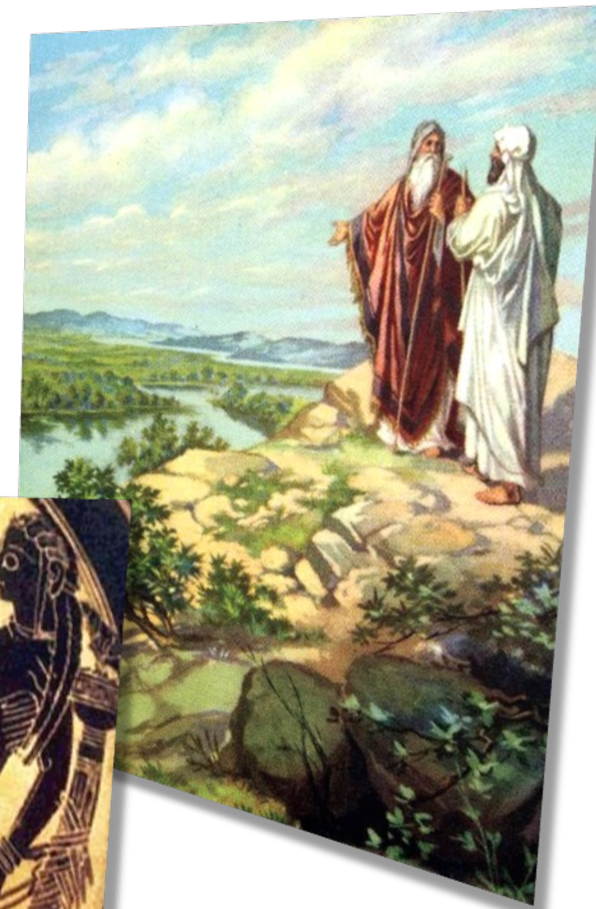
UMB Banská Bystrica, 4.12.2012

Čo je to koláč?

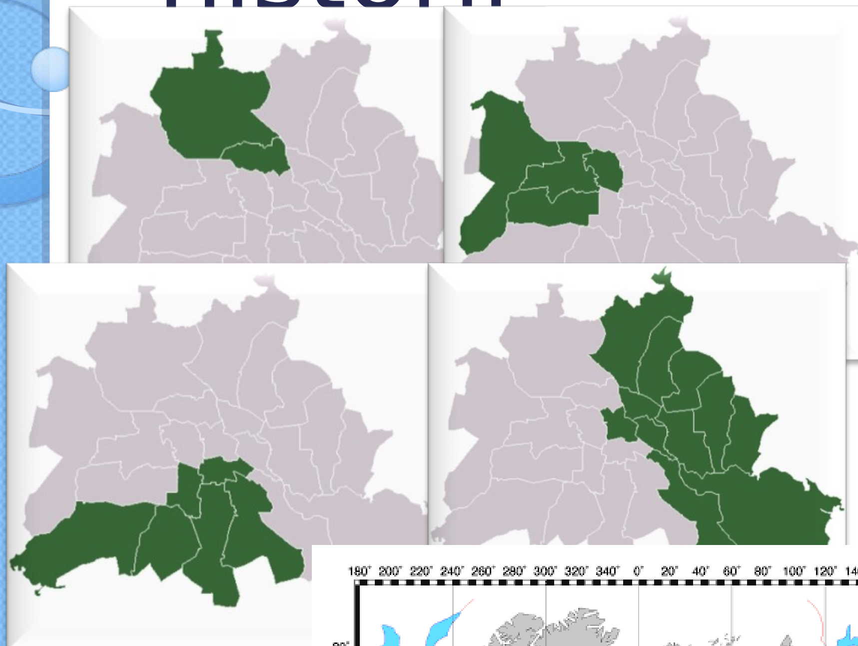
Akýkoľvek objekt, ktorý je možno deliť na ľubovoľne malé kúsky bez straty hodnoty.

Delenie koláča v starovekej literatúre

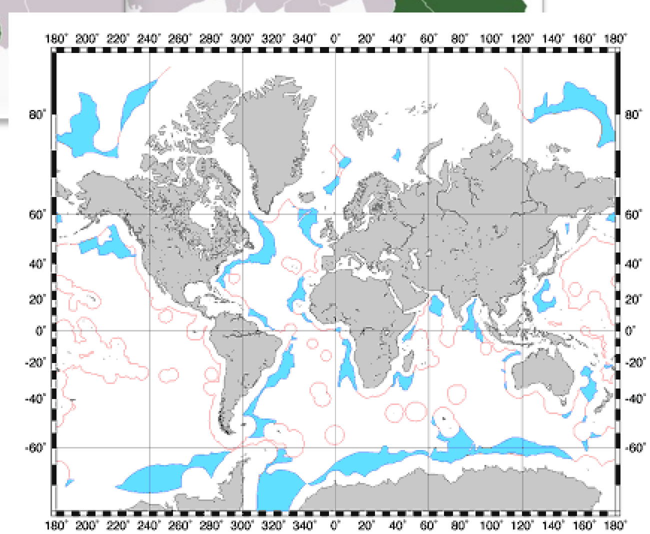
- Biblia (Abrahám & Lót)
- Grécka mytológia
  - (Prométeus a Zeus)
- Talmud



Delenie koláča v modernej histórii



Okupačné zóny, Berlín



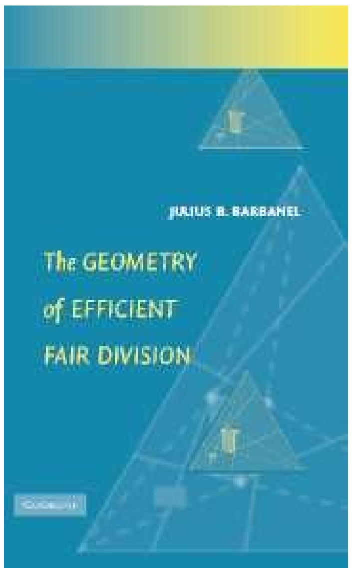
Convention of the Law of the Sea
(1994, 159 signatoárov)

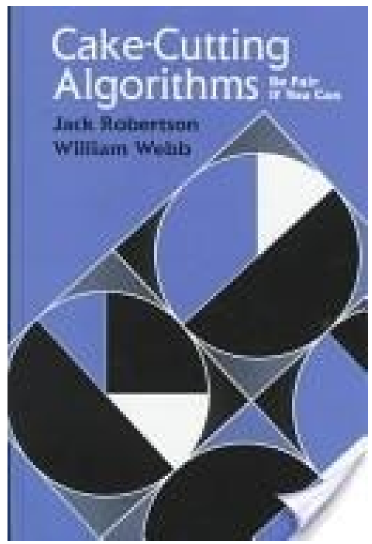
Mathematická teória spravodlivého delenia vznikla

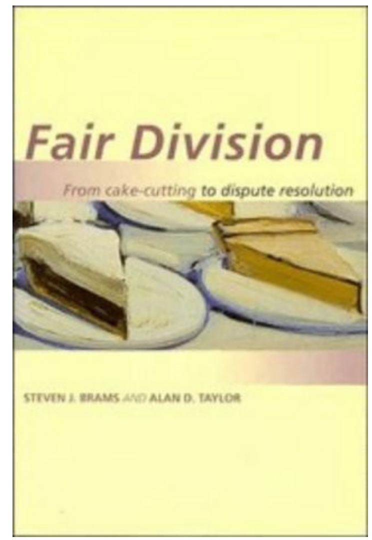
po 2. svetovej vojne vďaka poľským matematikom:

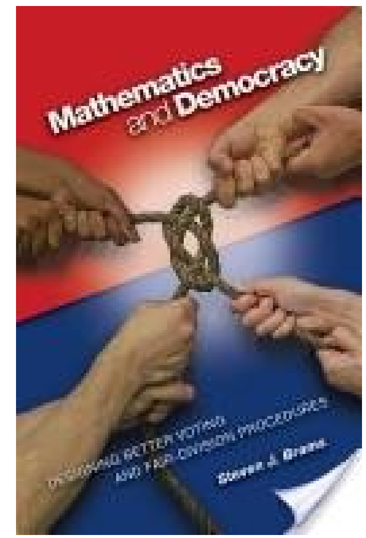
- **Hugo Steinhaus**
- **Stefan Banach**
- **Bronislaw Knaster**

Knihy o spravodlivom delení a delení koláča









Koláč je možné reprezentovať intervalom [0,1]

Hodnota celého koláča je rovnaká pre všetkých hráčov.

Ale rôznym častiam koláča môžu hráči prisudzovať rôznu hodnotu.

Problém delenia koláča

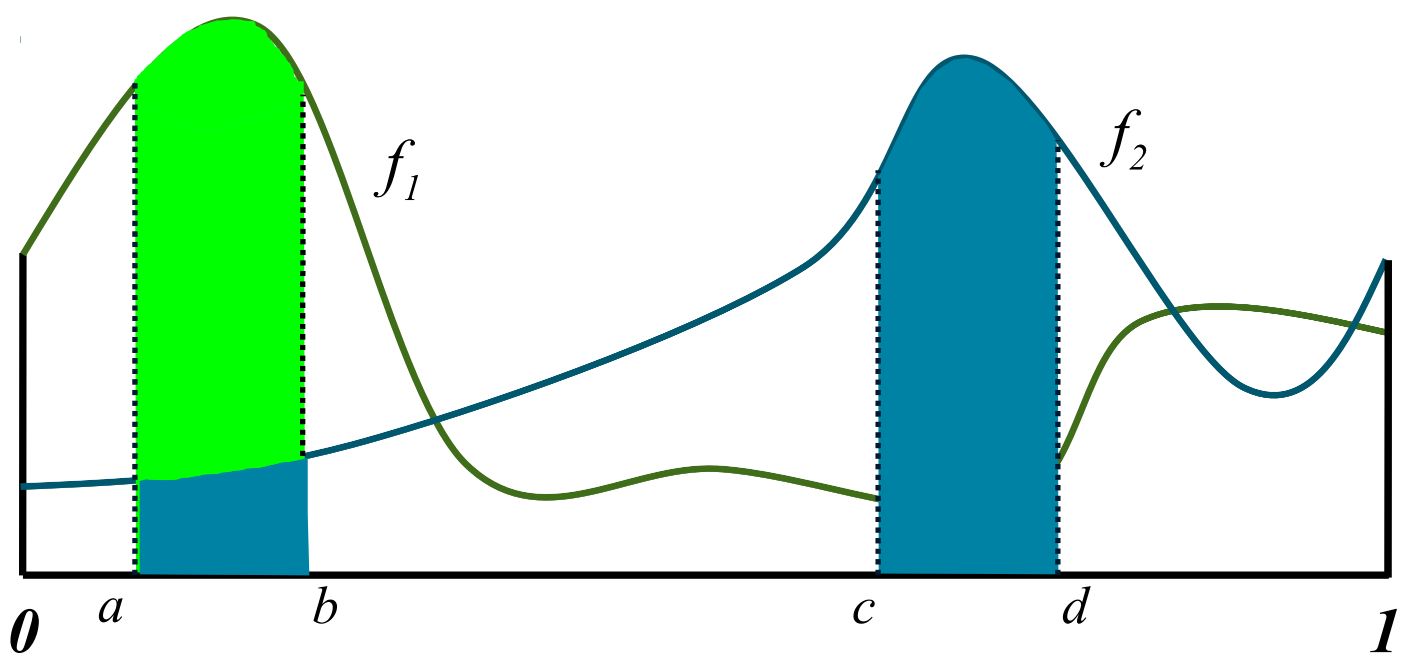
- **množina hráčov** $N = \{1, 2, ..., n\}$
- **koláč C** - reprezentovaný intervalom $[0, 1]$
- každý hráč i má na C nenatomickú **pravdepodobnostnú mieru** U_i so zodpovedajúcou distribučnou funkciou $F_i(x) = U_i(0, x)$
- miera intervalu $[p, q]$ je $F_i(q) - F_i(p)$.
- funkcia F_i je **nezáporná, neklesajúca, spojitá** a

$$F_i(0) = 0; F_i(1) = 1$$

- ak F_i má **hustotu** f_i, tak

$$U_i(p, q) = \int_p^q f_i(t)dt.$$

Miery hráčov



Kritériá spravodlivosti

Definícia

Delenie koláča C je rozklad koláča na disjunktné podmnožiny $A_1, A_2, ..., A_n$ také, že $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = C$

Definícia

Nech $A_1, A_2, ..., A_n$ je delenie koláča pre množinu hráčov N. Delenie sa nazýva

(i) **proporcionálne**, ak $U_i(A_i) \geq 1/n$ pre každé $i \in N$

(ii) **nekonfliktné**, ak $U_i(A_i) \geq U_i(A_j)$ pre každé $i, j \in N$

(iii) **rovnostárske**, ak $U_i(A_i) = U_j(A_j)$ pre každé $i, j \in N$.

(iv) **presné**, ak $U_i(A_j) = 1/n$ pre každé $i, j \in N$

Existencia rovnostárskych delení

N. Alon, ***Splitting necklaces***, 1987

solved. This continuous problem is closely related to a theorem of Hobby and Rice [HR] on L_1 approximation. Using our methods we can generalize the Hobby–Rice theorem and prove

THEOREM 1.2. *Let $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t$ be t continuous probability measures on the unit interval. Then it is possible to cut the interval in $(k-1)\cdot t$ places and partition the $(k-1)\cdot t+1$ resulting intervals into k families $F_1, F_2, \ldots, F_k$ such that $\mu_i(\cup F_j) = 1/k$ for all $1 \leqslant i \leqslant t$, $1 \leqslant j \leqslant k$. The number $(k-1)\cdot t$ is best possible.*

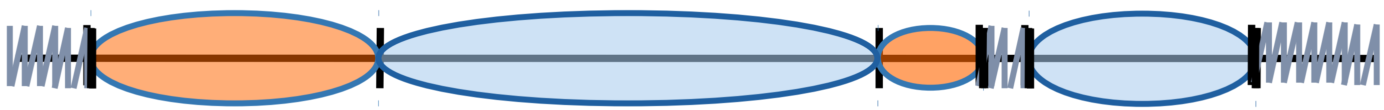
The case $k=2$ of the last Theorem is the Hobby–Rice theorem [HR]. Our paper is organized as follows. In Section 2 we formulate the continuous version of the k-splitting problem and prove that it implies the discrete one. In sections 3 and 4 we apply the topological results of [BSS]

Dolná hranica pre počet rezov: n(n-1)

11

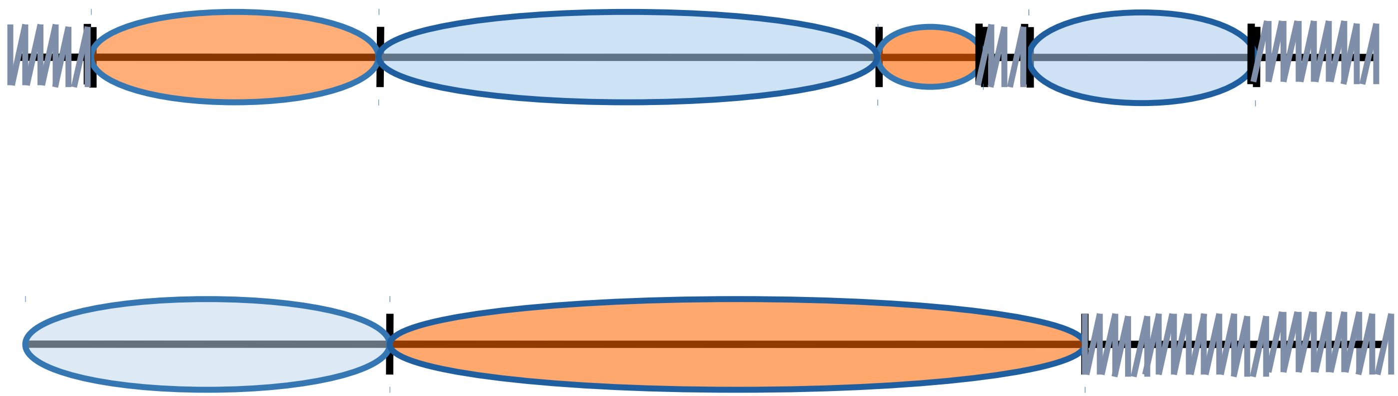
Jednoduché delenia

Noga Alon: 3 hráči $\Rightarrow$ 6 rezov



12

Jednoduché delenia



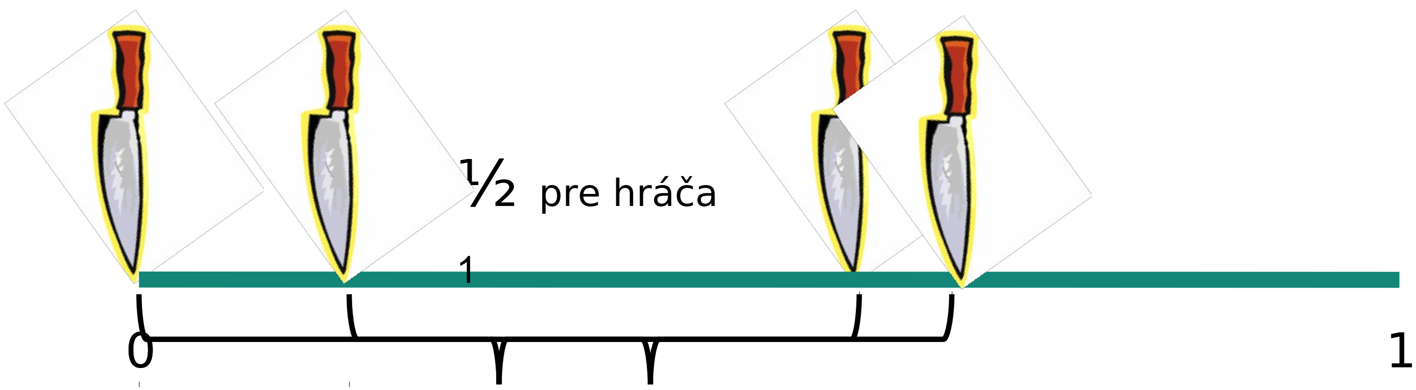
Definition

Jednoduché delenie koláča je dvojica $D = (d, \varphi)$, kde d je $(n-1)$-tica $(x_1, x_2 ..., x_{n-1})$ bodov rezu, $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_{n-1} \leq 1$ a φ je permutácia N.

13

Austinov algoritmus

- Hráč 1 položí nôž na ľavý okraj koláča. Druhý nôž položí rovnobežne s ním tak, aby hodnota úseku koláča medzi nožmi bola ½ z hodnoty koláča. Potom hýbe simultánne nožmi doprava tak, aby hodnota koláča medzi nožmi ostávala vždy rovnaká, až kým nenadobudne tú istú hodnotu aj pre hráča 2.



Príklad (Hill a Morrison, 2009)

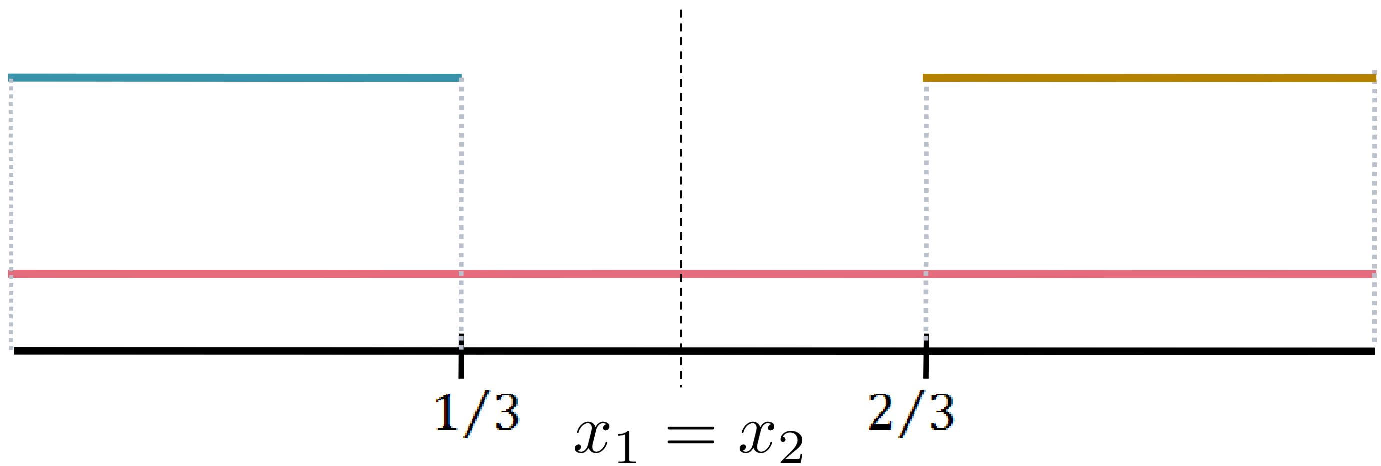
Nech hustoty pravdepodobnosti sú:

$$f_1(x) = 1$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 3 & \text{if } x \in [0, 1/3] \\ 0 & \text{if } x \in (1/3, 1] \end{cases}$$

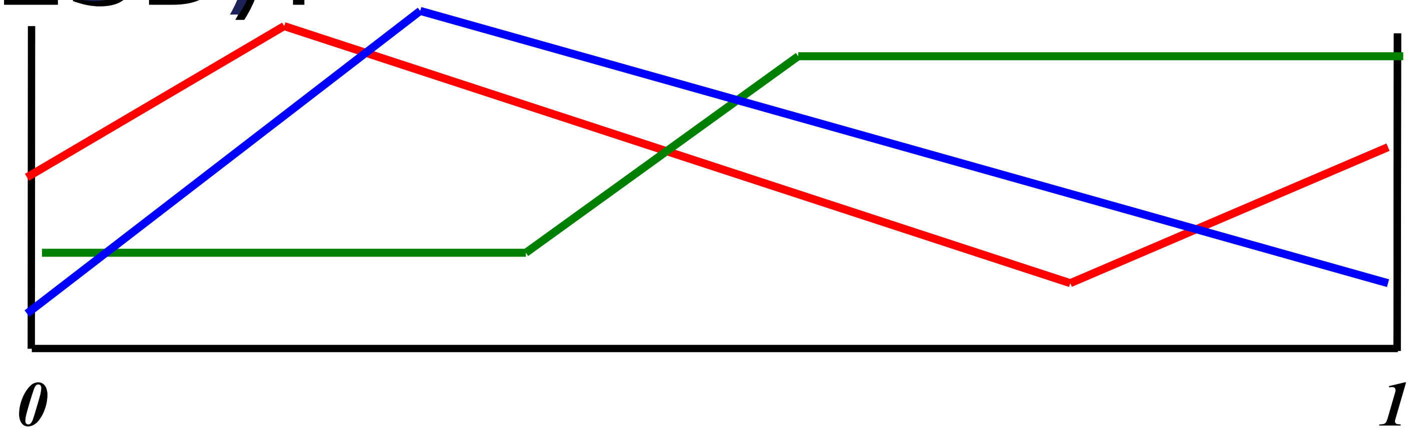
$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [0, 2/3] \\ 3 & \text{if } x \in (2/3, 1] \end{cases}$$

Vezmime poradie hráčov (1,3,2):



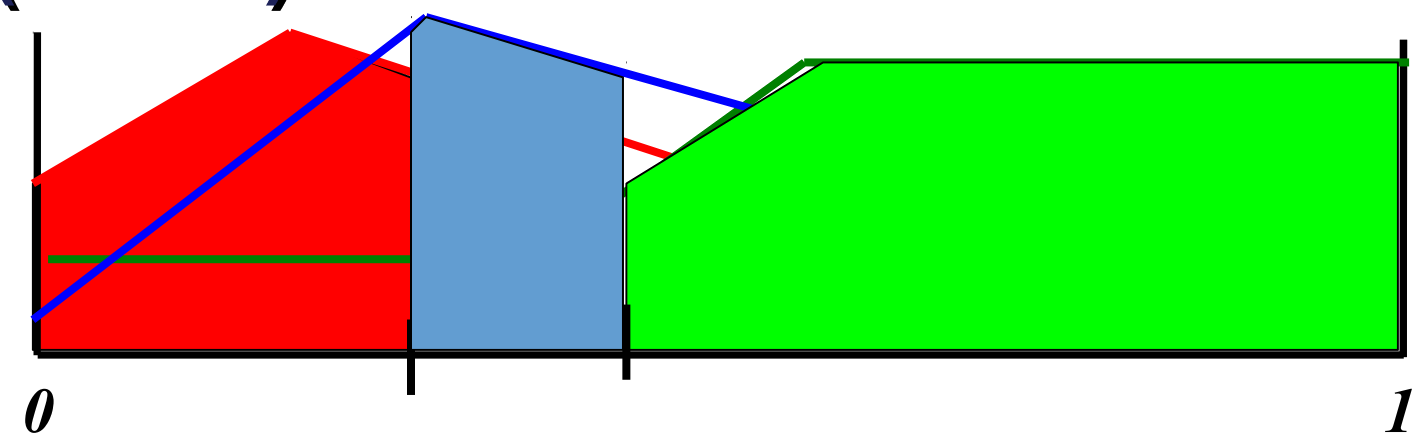
Jediné možné rovnostárske delenie dáva každému nulu.

Čo sú jednoduché rovnostárske delenia (ESD)?

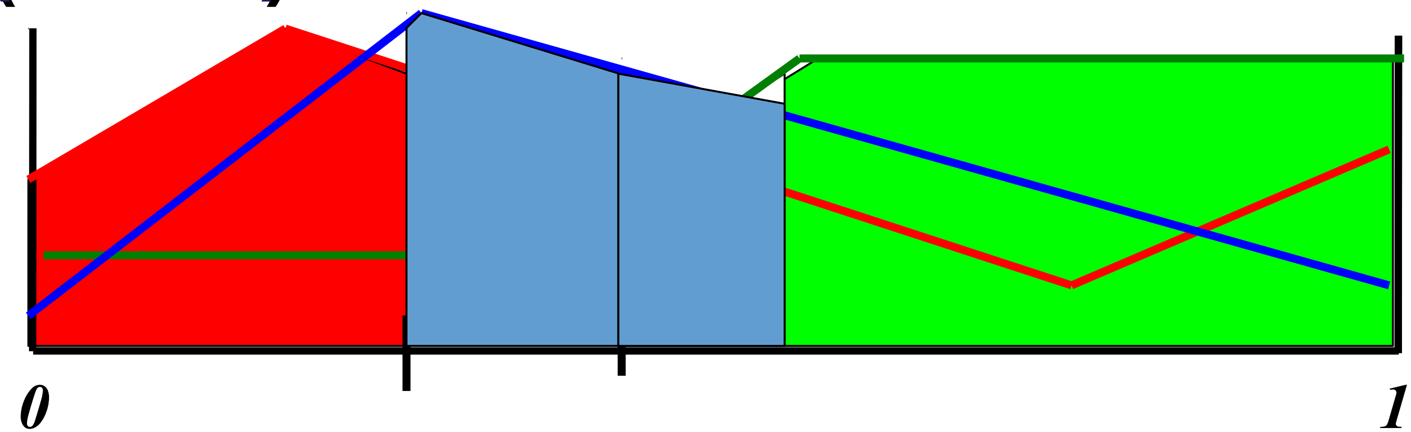


16

Čo sú jednoduché rovnostárske delenia (ESD)?



Čo sú jednoduché rovnostárske delenia (ESD)?



S. J. Brams, M.A. Jones, C. Klamler, 2006:

riešenie systému integrálnych rovníc

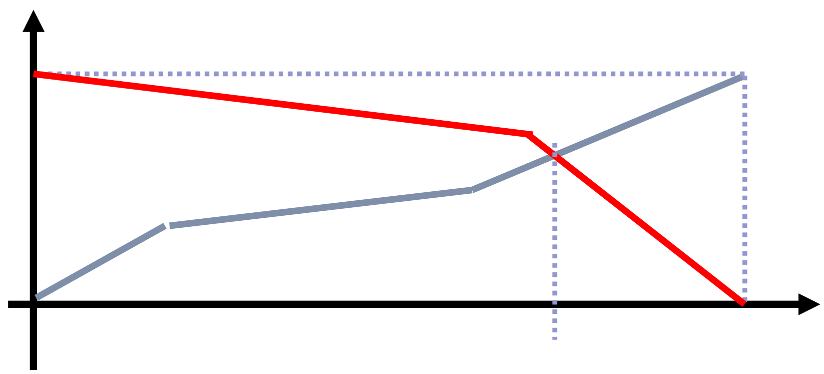
$$\int_0^{e_1} f_1(t)dt = \int_{e_1}^{e_2} f_2(t)dt = \cdots = \int_{e_{n-1}}^{1} f_n(t)dt.$$

s neznámymi $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$

Existencia ESD pre dvoch hráčov

Existuje bod $e_1 \in [0,1]$ taký, že $U_1(0,e_1) = U_2(e_1,1)$?

- funkcie $U_1(0,x_1)$,$U_2(x_1,1)$ premennej x_1 na [0,1] sú spojité
- $U_1(0,x_1)$ je neklesajúca, $U_2(x_1,1)$ je nerastúca

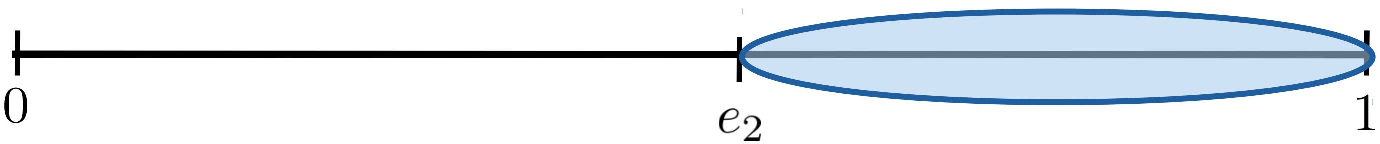


- $U_1(0,0) < U_2(0,1)$, $U_1(0,1) > U_2(1,1)$
- Riešenie vyplýva z vety o strednej hodnote.

Iný tvar rovnice: $F_1(e_1) = F_2(1) - F_2(e_1)$

Existencia ESD pre viac hráčov

Predpokladajme, že hráč 3 dostane kúsok $[e_2, 1]$.



Hráči 1 a 2 si rozdelia $[0, e_2]$ rovnostársky.

Rovnostársky bod e_1 vždy existuje.

Chceme viac: také $e_1, e_2 \in [0,1]$, že $U_1(0, e_1) = U_2(e_1, e_2) = U_3(e_2, 1)$

V jazyku distribučných funkcií pre prvých dvoch hráčov

$$F_1(e_1) = F_2(e_2) - F_2(e_1) \quad \Longrightarrow F_1(e_1) + F_2(e_1) = F_2(e_2)$$

Ak sú funkcie F_i rastúce ($= f_i$ sú všade kladné), tak $F_1 + F_2$ má inverziu a teda

$$e_1 = (F_1 + F_2)^{-1}(F_2(e_2))$$

Vo všeobecnosti nie je e_1 jednoznačne určený bodom e_2
$\Longrightarrow$ použili sme **zovšeobecnenú inverziu**.

20

Proporcionálne ESD existuje

Theorem (KC, Doboš, Pillárová 2011)

Jednoduché rovnostárske delenie pre n hráčov vždy existuje v každom poradí.

Theorem (Robertson, Webb 1998)

Pre n hráčov vždy existuje jednoduché proporcionálne delenie.

Theorem (KC, Doboš, Pillárová 2011)

Proporcionálne jednoduché delenie pre n hráčov vždy existuje v nejakom poradí.

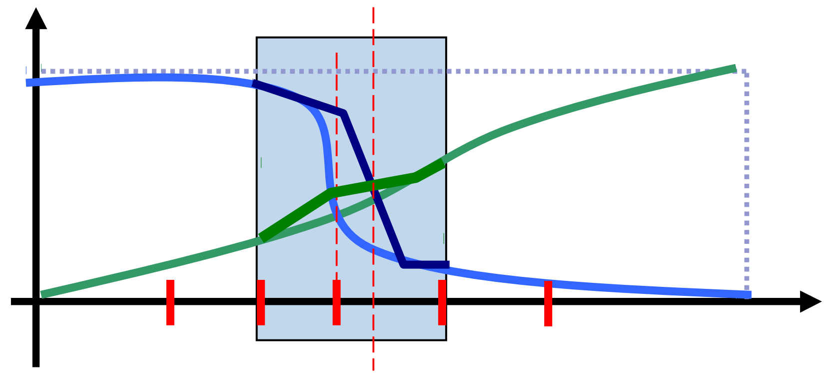
Čo je to konečný algoritmus delenia koláča?

Elementárne kroky sú dotazy nasledujúcich typov pre jedného hráča:

- **Značkovací dotaz**: Označ najľavejší bod x taký, že $F(x)$ je rovné danej konštante.
- **Inverzný značkovací dotaz**: Označ najpravejší bod x taký, že $1 - F(x)$ je rovné danej konštante.
- **Vyhodnocovací dotaz**: Aká je tvoja hodnota daného kúska koláča?

Konečný algoritmus nájde delenie koláča po konečnom počte dotazov dovolených typov.

Myšlienka dôkazu nemožnosti



Veta o strednej hodnote: vieme, že grafy sa pretínajú.

Vieme nájsť bod prieseku iba pomocou dovolených dotazov?

Ak máme šťastie, možno.

Ale nemáme žiadnu informáciu o funkciách v okolí očakávaného prieseku medzi doteraz urobenými značkami.

Takže nemáme záruku, že nájdeme priesek pomocou konečného počtu dotazov.

Neexistuje konečný algoritmus na nájdenie proporcionálneho delenia

W. Stromquist, ***Envy-free divisions cannot be found by finite protocols,*** 2008

Tuhý (stiff) systém mier (SMS) pre troch hráčov L, M, R:

	$\langle 0, x\rangle$	$\langle x, y\rangle$	$\langle y, 1\rangle$
U_L	t	s	s
U_M	s	t	s
U_R	s	s	t

- parametre $\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R$, $0 < s < 1/6$, $2s + t = 1$ a $0 < x < y < 1$

Theorem (KC a E. Pillárová)

Ak majú traja hráči L, M, R SMS s parametrami s, t, x, y tak **jediné proporcionálne ESD** má poradie (L, M, R) a rezy v bodoch x and y.

Takmer rovnostárske jednoduché delenia

Definícia

Nech D je delenie koláča a $\varepsilon > 0$ reálne číslo. Povieme, že D je ε-rovnostárske, ak

$$|U_i(D_i) - U_j(D_j))| \leq \varepsilon \text{ pre každé } i, j \in N.$$

Robertson a Webb (1988) navrhli konečný algoritmus na ε-presné delenie. Výsledkom je ale veľa malých kúskov.

Náš algoritmus vyrobí proporcionálne ε-rovnostárske delenie tým, že aproximuje rovnostársku hodnotu jej binárnym rozvojom.

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 1/2^k \qquad \text{kde každé } c_k \in \{0, 1\}$$

Takmer rovnostársky algoritmus

Tri fázy:

1. Usporiadanie
2. Pridávanie
3. Ukončenie

Nájde poradie, v ktorom existuje proporcionálne delenie

Approximuje binárny rozvoj rovnostárskej hodnoty

Zaručí rovnostárskosť

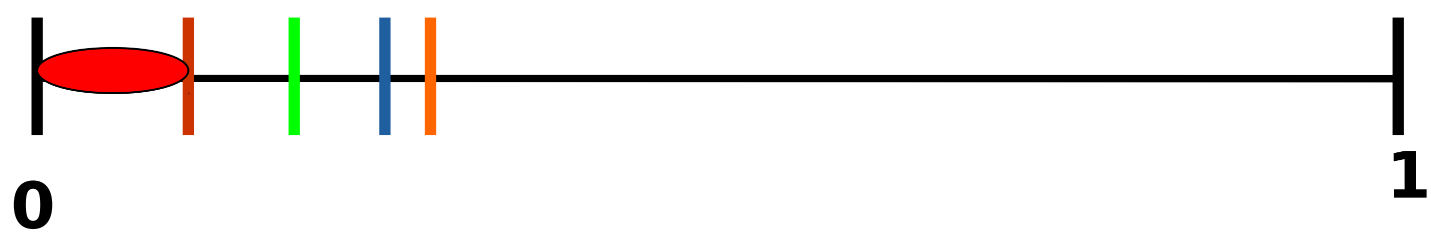
26

Takmer rovnostársky algoritmus – usporiadanie

Krok1. Každý hráč i povie najľavejší bod x_i taký, že $U_i(0, x_i) = 1/n$.

Krok 2. Hráč s bodom najviac vľavo bude prvý, jeho bod rezu bude prvým deliacim bodom.

Krok 3. Všetky značky sa zmažú, vybratý hráč opustí hru a algoritmus pokračuje.



Najrýchlejšia implementácia: $O(n\ log\ n)$ (Even & Paz 1984).

Takmer rovnostársky algoritmus – pridávanie

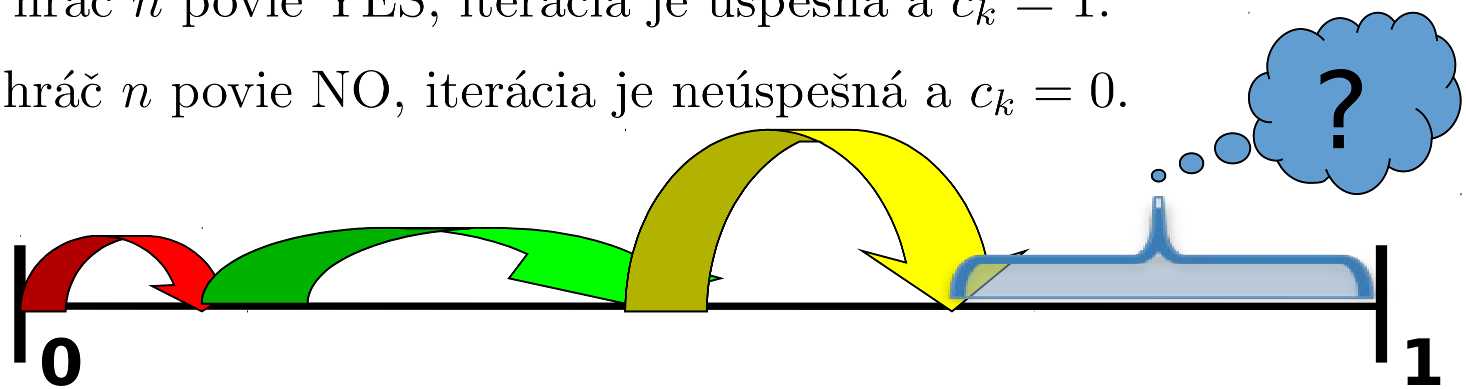
Pracuje v iteráciách. V iterácii k predpokladáme, že číslice $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ binárnej expanzi E už sú správne určené. Hľadáme c_k.

Pýtame sa hráčov $i = 1, 2, \ldots, n-1$:
Povedz najľavejší bod x_i taký, že $U_i(x_{i-1}, x_i) = \lfloor E \rfloor_{j-1} + 1/2^j$

Otázka hráčovi n: Platí: $U_n(x_{n-1}, 1) \geq \lfloor E \rfloor_{j-1} + 1/2^j$?

Ak hráč n povie YES, iterácia je úspešná a $c_k = 1$.

Ak hráč n povie NO, iterácia je neúspešná a $c_k = 0$.



Pridávanie končí, keď dosiahneme rovnostárske delenie alebo $1/2^k < \varepsilon$.

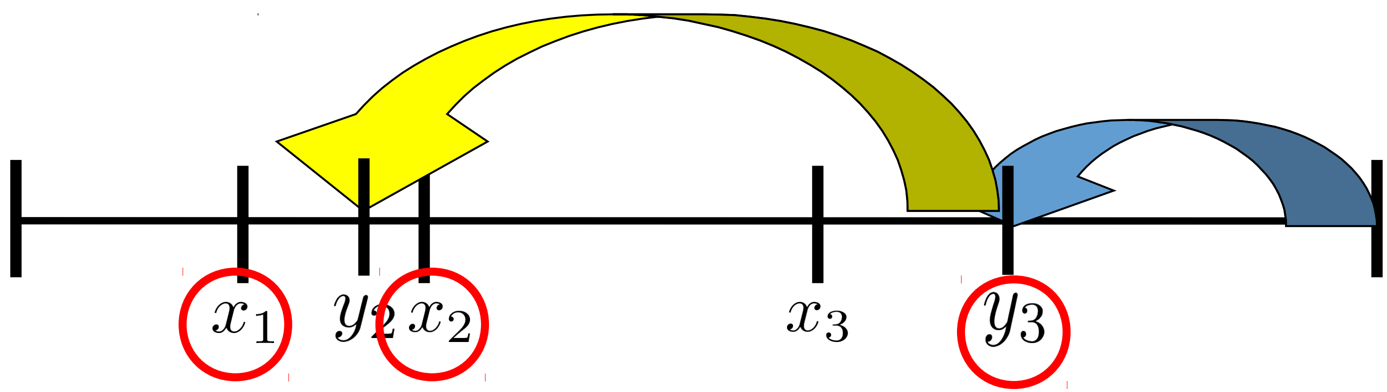
28

Takmer rovnostársky algoritmus – ukončenie

Vieme približnú hodnotu E a potenciálne deliace body. Zostáva zaručiť, že hráč n nedostane príliš veľa alebo príliš málo.

For $i = n$ downto 2 do
hráč i: povedz napravejší bod y_{i-1} taký, že $U_i(y_{i-1}, y_i) = \lfloor E \rfloor_j^+$.

Ak $y_{i-1} \leq x_{i-1}$, rozrež koláč v bodoch $x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, \ldots, y_{n-1}$ a STOP



Tieto body rezu zaručujú rovnostárskosť.

29

Ďakujem za pozornosť

30